



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

ULB

Ein Beitrag zum Problem der Flüssigkeitsspaltung in der Drucktechnik

Hübner, Gunter
(1991)

DOI (TUprints): <https://doi.org/10.25534/tuprints-00013550>

License:



CC-BY 4.0 International - Creative Commons, Attribution

Publication type: Book

Division: 16 Department of Mechanical Engineering
16 Department of Mechanical Engineering

Original source: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/13550>

Ein Beitrag zum Problem der Flüssigkeitsspaltung in der Drucktechnik

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Hochschule Darmstadt

zur

Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Gunter Hübner
aus Grünstadt

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Chr. Hars
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. J. H. Spurk
Mitberichterstatter:	em. o. Prof. Dipl.-Ing. K. R. Scheuter
Tag der Einreichung:	30. 9. 1988
Tag der mündlichen Prüfung:	22. 8. 1991

Darmstadt 1991
D 17

Die vorliegende Dissertation entstand während und nach meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren der Technischen Hochschule Darmstadt im Rahmen des von der Arbeitsgemeinschaft Industrieller Forschungsvereinigungen (AIF) geförderten Forschungsvorhabens "Untersuchung von grenzflächenphysikalischen Eigenschaften und deren Veränderungen an farb- und wasserführenden Oberflächen in Offsetdruckmaschinen". Für die Unterstützung seitens der AIF, der Forschungsgesellschaft Druckmaschinen und deren Mitgliedsfirmen sei hiermit gedankt.

Für die Unterstützung dieser Arbeit durch das zur Verfügung stellen der notwendigen Rechnerressourcen möchte ich der Firma DUPONT de Nemours (Deutschland), Neu-Isenburg, meinen Dank aussprechen.

Herrn Professor Dr.-Ing. Christoph Hars, dem Institutsleiter, danke ich für sein großes Interesse und die wertvollen Anregungen, die wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ebenfalls danke ich Herrn em. o. Professor Dipl.-Ing. Karl R. Scheuter, der in vielen fruchtbaren Diskussionen den Grundstein für diese Arbeit legte.

Mein Dank gilt weiterhin den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts, die mir alle beim Zustandekommen dieser Arbeit stets hilfsbereit und tatkräftig zur Seite standen.

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß
ich die vorliegende Arbeit - abgesehen
von den ausdrücklich genannten Hilfen -
selbständig verfaßt habe.

Guenter Hübner

Ein Beitrag zum Problem der Flüssigkeitsspaltung in der Drucktechnik

Formelzeichen	1
1. Einleitung, Problemstellung	4
1.1 Zwei Klassen von Farbspaltungsvorgängen.....	4
1.2 Analyse des Farbspaltungsprozesses	8
2. Farbspaltungsvorgänge und Flüssigkeitsbrücken in der Literatur	12
3. Modellbildung	17
4. Der statische Zustand.....	21
4.1 Herleitung der Grundgleichung für das Gleichgewicht.....	21
4.2 Einfluß der Gravitation	24
4.3 Herleitung der Gleichgewichtsbedingung aus dem Energieprinzip	26
4.4 Minimalflächenproblem.....	35
4.5 Exakte Lösung von Gleichung (4.95)	38
4.6 Stabilität von Flüssigkeitsbrücken.....	42
4.7 Lösungsklassen und Randbedingungen.....	43
4.8 Spezialfall Katenoide	52
4.9 Lösung für das verwandte, ebene Problem	60
4.10 Numerische Lösung der Kontur-DGL (4.13).....	63
4.11 Randwinkel und Grundradien während des Trennvorgangs	66
4.11.1 Messungen	66
4.11.2 Vorrück- und Rückzugswinkel.....	70
5. Dynamischer Fall	73
5.1 Beschleunigungen beim Farbspaltungsprozeß	73
5.2 Allgemeine Voraussetzungen für die Rechnung.....	78
5.3 Randbedingungen an den Platten und der freien Oberfläche.....	79
5.3.1 Dynamische Randbedingung	79
5.3.2 Kinematische Randbedingungen	81
5.3.3 Bedingungen an der Dreiphasenkontaktstelle.....	82
5.4 Vereinfachungen für Newtonsche Flüssigkeiten.....	86
5.5 Stefansche Lösung	88
5.6 Reibungsfreie Strömung	95
5.7 Numerische Lösung unter Berücksichtigung der freien Oberfläche mit Hilfe eines Finite-Elemente-Programms	99
5.7.1 Allgemeines zum Programm.....	100
5.7.2 Entdimensionierung	102
5.7.3 Behandlung der freien Oberflächen in FIDAP	102
5.7.4 Lösungen mit "starren" Platten, Behandlung der Dreiphasenkontaktstelle	104
5.7.5 Prozedur für Lösungen mit bewegten Platten	114
5.7.6 Ergebnisse mit bewegten Platten	115
6. Zusammenfassung	128
7. Literatur	129
Anhänge A,B,C,D	

Formelzeichen

Zeichen	Einheit	Erklärung
a	-	Konstante, bei Katenoiden: $a=\xi_{\min}$
b	-	1) Konstante bei Katenoiden: $b=\zeta_m/\xi_{\min}$
	m/s^2	2) Beschleunigung
c	-	Integrationskonstante
e	$1/s$	Deformationsgeschwindigkeitstensor
h	m	Plattenabstand (zeitabhängig)
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
k	-	Konstante
l	m	Länge
n	m	Normalenvektor
p	N/m^2	Druck
p_a	N/m^2	Umgebungsdruck
p_i	N/m^2	Druck unterhalb Oberfläche
p_0	N/m^2	Druck bei $r=z=0$
r	m	radiale Koordinate
r_1	m	Walzenradius
r_2	m	Walzenradius
s	-	Substitutionsvariable
t	s	Zeit
t	m	1) Tangentenvektor
	N/m^2	2) Spannungsvektor
u	m/s	Geschwindigkeitsvektor
u	m/s	Komponente von u in r -Richtung
v	m/s	1) Komponente von u in φ -Richtung
	m/s	2) Walzenoberflächengeschwindigkeit
w	m/s	Komponente von u in z -Richtung
w_h	m/s	Geschwindigkeit der oberen Platte
x,y,z	m	kartesische Koordinaten
A	m^2	Oberfläche
Bo	-	Bondzahl
Ca	-	Kapillaritätszahl
E_{pot}	Nm	potentielle Energie

E		1) Elliptisches Integral 1.Art 2) Fundamentalgröße einer Fläche (Differentialgeometrie)
F		1) Elliptisches Integral 2.Art 2) Fundamentalgröße einer Fläche
	N	3) Kraft
Fr	-	Froudezahl
G		1) Fundamentalgröße einer Fläche
	N/m ²	2) Schubmodul
H	1/m	Gaußsches Krümmungsmaß
K	-	Konstante
L	m	charakteristische Länge
La ₂	-	Laplace-Zahl 2
P		Polynom
R	m	Ortsvektor der Oberfläche
R	m	Konturkurve, in der Regel: R(z)
R ₀	m	unterer Grundradius der Kurve
R _h	m	oberer Grundradius der Kurve
R _{min}	m	Minimalradius der Kontur
R ₁ , R ₂	m	Hauptkrümmungsradien
Re	-	Reynoldszahl
U	m/s	charakteristische Geschwindigkeit
V	m ³	Volumen
We	-	Weberzahl

griechische Zeichen

Zeichen	Einheit	Erklärung
α	-	Steigungswinkel
β	-	1) Substitutionsvariable
	m	2) Slipkoeffizient
	-	3) Winkel
γ	N/m	Oberflächenspannung
δ		Variation
δ	-	Einheitsmatrix
ϵ	-	Schranke (kleine Zahl)
ϕ	m ² /s	Strömungspotential
φ	-	Winkelkoordinate

ϑ	-	Randwinkel
ϑ_0	-	Randwinkel an unterer Platte bei $z=0$
ϑ_h	-	Randwinkel an oberer Platte bei $z=h$
η	Ns/m ²	Zähigkeit der Flüssigkeit
λ	-	Konstante (Lagrange-Parameter)
μ	-	Flächenverschiebungsfaktor
μ	N/m ²	Reibspannungstensor
ν	-	Flächenverschiebungsfaktor
ρ	kg/m ³	Dichte
θ	-	Steigung (entspricht R')
θ_0	-	Steigung der Kontur an der unteren Platte
θ_h	-	Steigung der Kontur an der oberen Platte
τ	N/m ²	Spannungstensor
ξ	-	dimensionsloser Konturradius
ξ_{\min}	-	dimensionsloser Minimalradius
ξ_1, ξ_2	-	Nullstellen
ζ	-	dimensionslose Koordinate
ζ_m	-	Abstand der Lage des Minimalradius von der unteren Platte
ω	1/s	Winkelgeschwindigkeit

Indizes

Index	Bedeutung
0	an der unteren Platte bei $z=0$
h	an der oberen Platte bei $z=h$
z, r, φ	Richtungsableitungen
L	<u>L</u> iquid, Flüssigkeit
S	<u>S</u> olid, Festkörper

1. Einleitung. Problemstellung

Die Drucktechnik hat zur Aufgabe, visuelle Informationen zu verarbeiten und sie in für den Betrachter erkennbarer Form beliebig oft wiederholbar auf Substraten unterschiedlichster Art sichtbar zu machen. Dazu werden in der Regel angefärbte Flüssigkeiten (Farben) in sehr dünnen Schichten auf diese Substrate aufgebracht, wobei eine scharfe Berandung der farbführenden Flächen gegenüber farbfreien Flächen für die notwendigen Kontraste, d.h. die unterscheidbaren Ereignisse, sorgt und somit den Inhalt der Information trägt. Durch diesen flächenselektiven Materialauftrag grenzt sich die Drucktechnik auch von den durchaus verwandten Lackier-, Laminier- und Coatingverfahren ab. Die bei zu übertragenden Bildern vorkommenden Hell-Dunkel-Verläufe werden in der Regel nicht durch Schichthöhenvariationen, sondern durch Variation des Verhältnisses aus druckenden und nichtdruckenden Teilflächen erzeugt. Man nennt diesen Prozeß Rastern. Die Durchmesser der Rasterpunkte schwanken zwischen $10\mu\text{m}$ bis maximal $500\mu\text{m}$, während die Schichthöhen unter $10\mu\text{m}$ liegen. Die Aufgabe der Farb- und Druckwerke von Druckmaschinen besteht somit darin, aus einem Farbvorrat kleine Teilmengen abzuspalten und auf dem Bedruckstoff flächig aufzubringen.

Die endgültige Abtrennung kleiner Farbmengen kann in den meisten Fällen nicht in einem einzigen Schritt erfolgen, sondern je nach Druckverfahren werden mehrere Übertragungs- und Trennprozesse hintereinandergeschaltet. Inwieweit diese Übertragungsprozesse durch grenz- und oberflächenphysikalische Effekte beeinflusst werden, soll in dieser Arbeit näher beleuchtet werden. Analysiert man die Farbübertragungsprozesse von einer Farbträgeroberfläche zur nächsten, stellt man fest, daß sie stets mit der Bildung und dem Zerfall von Flüssigkeitsbrücken verbunden sind. Je nach dem zur Spaltung zur Verfügung stehenden Farbangebot lassen sich die Vorgänge grundsätzlich in zwei Klassen unterteilen.

1.1 Zwei Klassen von Farbspaltungsvorgängen

Die erste Klasse der Farbspaltungsvorgänge dient zur Separierung von kleinen Flüssigkeitsteilmengen aus einem größeren Reservoir. Das wesentliche Merkmal ist dabei das für die Spaltung quasi unbegrenzt zur Verfügung stehende Flüssigkeitsvolumen. Im Gegensatz dazu steht bei der zweiten Klasse

der Farbspaltungsvorgänge nur ein relativ kleines, abgeschlossenes Farbvo-
lumen zur Verfügung.

Das überschüssige Farbangebot bei der ersten Klasse der Farbspaltungsvor-
gänge kommt dadurch zustande, daß mindestens eine der beiden Farbträger-
oberflächen mit einer geschlossenen Farbschicht vollständig eingefärbt ist
und soviel Flüssigkeit zur Bildung der Flüssigkeitsbrücke vorhanden ist, wie es
das Spiel der beteiligten hydrodynamischen und Oberflächenkräfte erfordert.
Sind beide Farbträgeroberflächen vollständig eingefärbt, soll von der reinen
Schichtspaltung gesprochen werden, die zur ersten Klasse zu zählen ist. Sie
ist typisch für die Farbwerke derjenigen Druckverfahren, die pastöse Farben
verarbeiten. Aufgrund der hohen Zähigkeit der benutzten Farben gelingt es
hier nicht, die Endschichtdicke durch einen einzigen Spaltungsschritt zu erzie-
len, sondern man ist gezwungen, die Schichtspaltung mehrfach hintereinan-
derschaltet (daher die große Zahl der Farbwerkswalzen) anzuwenden.

Bei der reinen Schichtspaltung homogener Flüssigkeiten spielen Grenz- und
Oberflächeneffekte keine Rolle, da die Wirklänge der Oberflächenkräfte (weni-
ge nm) in das angrenzende Medium hinein wesentlich kleiner ist als die in der
Drucktechnik auftretenden Schichtdicken ($\approx 10 \mu\text{m}$). Deshalb soll hier nicht
näher auf den Schichtspaltungsprozeß eingegangen werden.

Zwei Beispiele zu den bei den Hauptdruckverfahren (Flach-, Tief- und Hoch-
druck) vorkommenden Farbspaltungsvorgängen der ersten Klasse (neben der
reinen Schichtspaltung) zeigen die unmaßstäblichen Abbildungen 1.1 und
1.2.

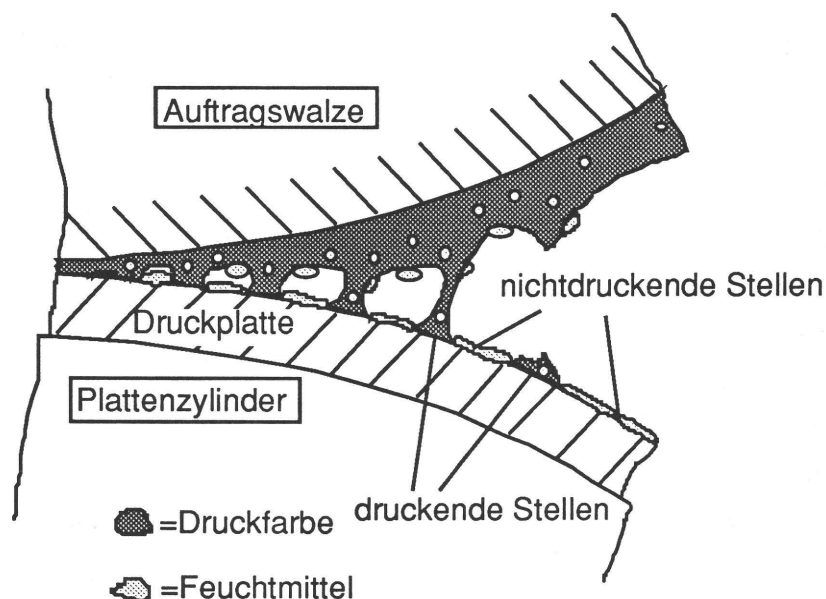


Abb. 1.1 Farbspaltungsprozeß der ersten Klasse:
Farbauftragswalze - Flachdruckplatte

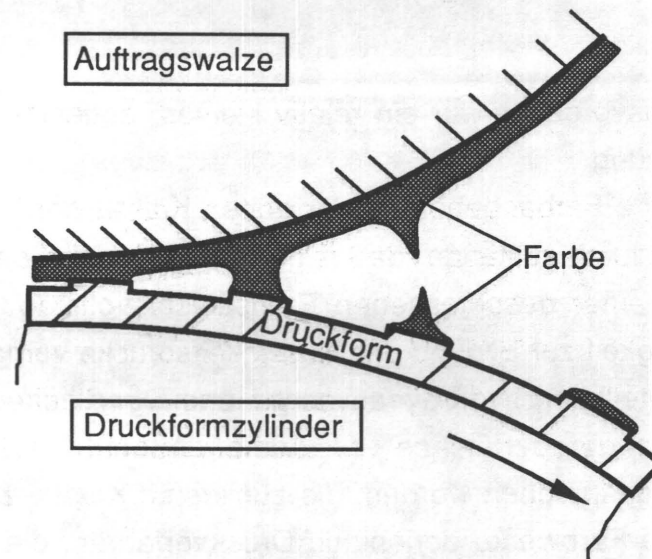


Abb. 1.2 Farbspaltungsprozeß der ersten Klasse:
Farbauftragswalze - Hochdruckplatte

Die gezeigten Farbspaltungsvorgänge treten bei der Einfärbung der Druckformen auf. Hier spielen insbesondere die Oberflächeneigenschaften der Druckformen eine Rolle, weil die farbannehmenden Flächen der Druckformen örtlich begrenzt sind und somit den Spaltungsvorgang bestimmen. Durch diese Übertragungsprozesse zur Druckform werden in der Regel kleine Farbvolumina der Größenordnung von 1 mm^3 und weit darunter erzeugt (Die von der Flüssigkeit benetzten Grundflächen haben die Größe der Rasterpunkte). Diese kleinen, abgeschlossenen Volumina bilden wiederum den Ausgangspunkt und das eigentliche Kennzeichen für die Farbspaltungsvorgänge der zweiten Klasse.

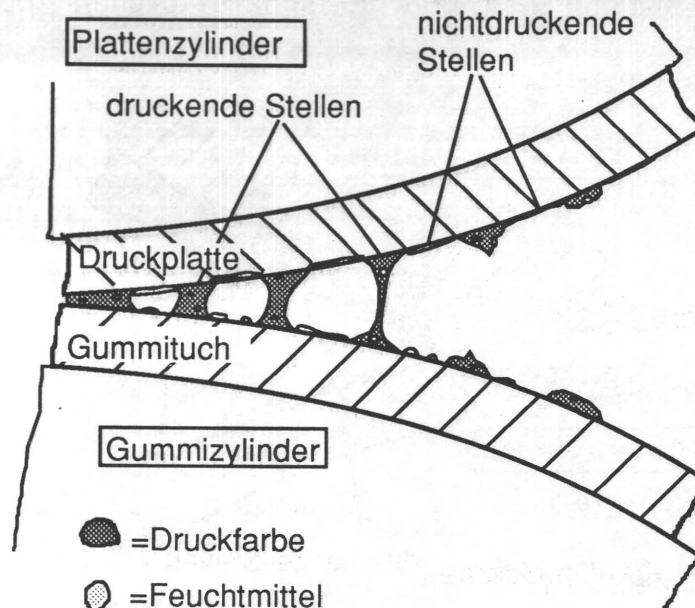


Abb. 1.3 Farbspaltungsprozeß der zweiten Klasse:
Flachdruckplatte - Gummituch

Beispiele zu den bei den Hauptdruckverfahren vorkommenden Farbspaltungsvorgängen der zweiten Klasse zeigen die Abbildungen 1.3 bis 1.6.

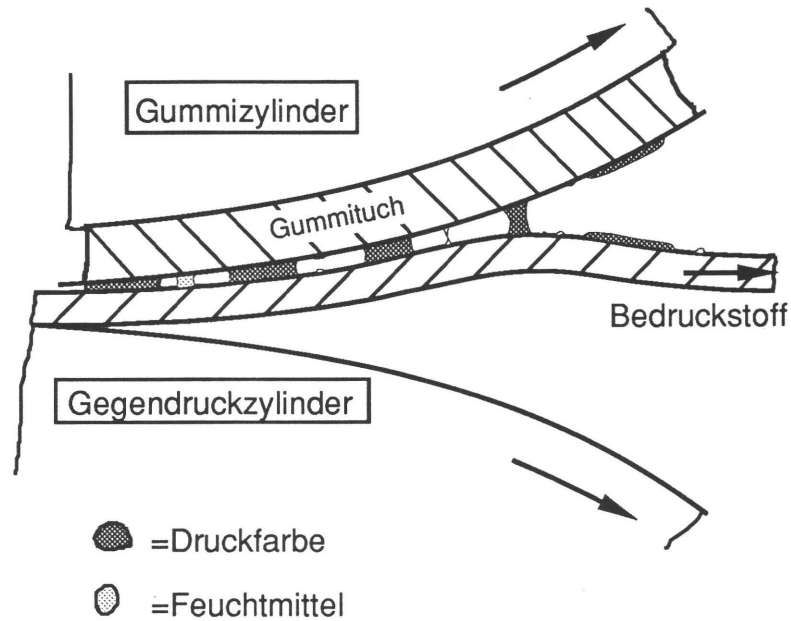


Abb. 1.4 Farbspaltungsprozeß der zweiten Klasse: Gummituch - Bedruckstoff (Rollenoffset)

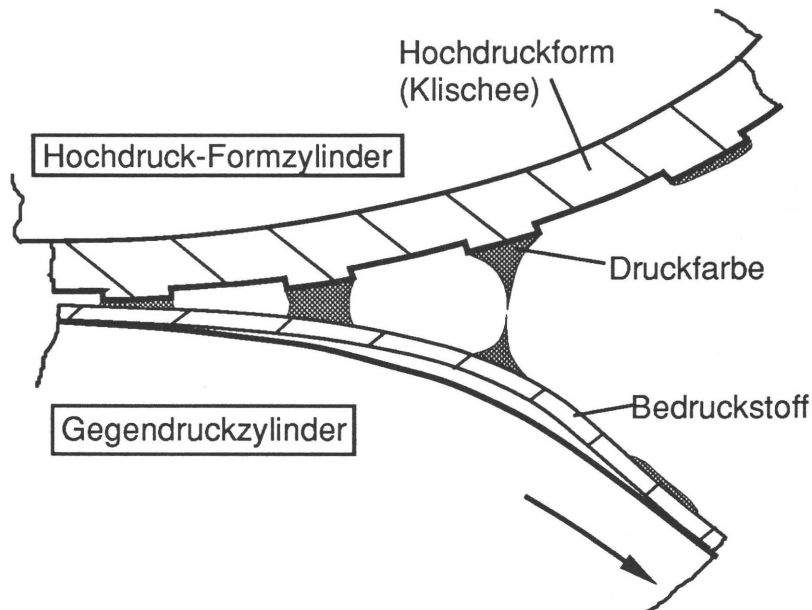


Abb. 1.5 Farbspaltungsprozeß der zweiten Klasse: Hochdruckplatte - Bedruckstoff

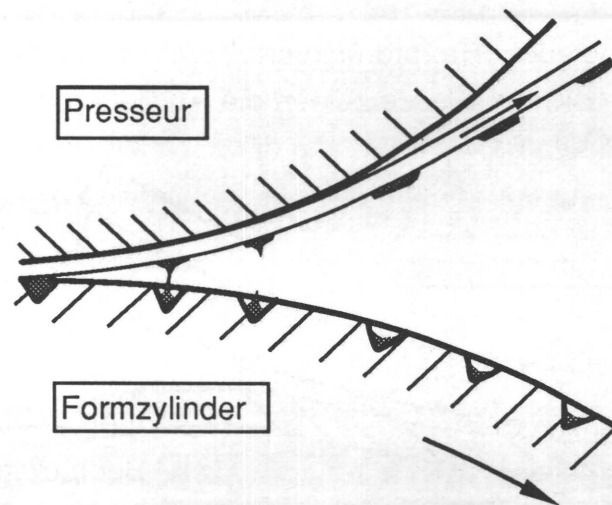


Abb. 1.6 Farbspaltungsprozeß der zweiten Klasse:
Tiefdruckzylinder - Bedruckstoff

Bei jedem der drei mit Farbflüssigkeiten operierenden Hauptdruckverfahren, Flach-, Tief- und Hochdruck, findet man demnach beide Klassen der Farbübertragungsprozesse (beim Tiefdruck findet ein geometrisch komplizierter Farbspaltungsvorgang der ersten Klasse beim Durchgang durch den Rakelspalt statt). Ausschließlich die erste Klasse der Farbübertragung tritt beim Tintenstrahl Druck und beim Durchdruck (Siebdruck) auf, bei denen die Separierung kleiner Flüssigkeitsmengen direkt bei der Farbübertragung zum Bedruckstoff erfolgt.

1.2 Analyse des Farbspaltungsprozesses

Alle direkt von einem Farbträger (Festkörper) zum nächsten kontaktierenden Farbübertragungsprozesse haben im zeitlichen Ablauf folgende Teilschritte gemeinsam:

- Annähern der beiden Farbträger (Farbträger 2 farbfrei oder mit geringerer Farbschicht)
- Benetzung des zweiten Farbträgers, Bilden einer "Flüssigkeitsbrücke"
- Trennen der Farbträger

Der letzte Teilschritt führt zum Abriß der Flüssigkeitsbrücke und somit zur Spaltung des Farbvolumens. Diese Vorgänge laufen aus Produktivitätsgründen in der Regel rotativ ab, d.h. die Teilschritte werden durch das Durchlaufen einer Berührstelle zwischen zwei Walzen bestimmt. Der Einfluß der Grenz- und Oberflächenkräfte macht sich dabei auf zweierlei Art bemerkbar. Einer-

seits bestimmt die Oberflächenspannung der Farbflüssigkeit die Form der Kontur der Flüssigkeitsbrücke, andererseits ist die Benetzbarkeit der beteiligten Festkörperoberflächen maßgebend für die übertragbare Farbmenge. In der Drucktechnik bedeutet eine schlechte oder stochastische Farbübertragung letztendlich die Unbrauchbarkeit oder minderwertige Qualität des Produktes. Deshalb ist die Kenntnis der grenzflächenphysikalischen Eigenschaften der beim Druckprozeß beteiligten Materialien und ihr Zusammenwirken Voraussetzung für eine stabile Prozeßführung, insbesondere beim Bedrucken schlecht benetzbarer Bedruckstoffe. Beim wirtschaftlich bedeutendsten Druckverfahren, dem Flachdruck, beruht der bilddifferenzierende Mechanismus sogar ausschließlich auf den grenzflächenphysikalischen Benetzbarkeitsunterschieden.

Das Zusammenspiel der Grenz- und Oberflächenkräfte wird entscheidend durch den sich an der Dreiphasenkontaktklinie zwischen Flüssigkeit und Festkörper ausbildenden makroskopischen Randwinkel charakterisiert. Er kann theoretisch Werte zwischen 0° (ideale Benetzung = Spreitung) und 180° (nicht benetzend) annehmen, was in Abb. 1.7 verdeutlicht wird.

Da bei der zweiten Klasse der Farbübertragungsprozesse grundsätzlich zwei solcher Dreiphasengrenzlinien auftreten, haben die Benetzbarkeitsunterschiede hier einen größeren Einfluß als bei der ersten Klasse, bei der höchstens ein Randwinkel zu berücksichtigen ist.

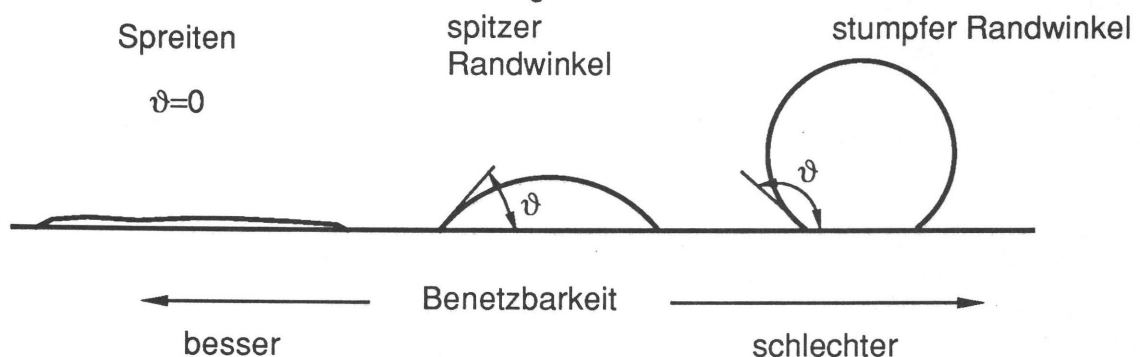


Abb. 1.7 Randwinkel und Benetzbarkeit

Stellt sich bei der zweiten Klasse der Farbspaltungsprozesse an beiden Farbträgern der gleiche Randwinkel ein, muß die Spaltung hälftig erfolgen. Bei ungleichen Randwinkeln verschiebt sich die schwächste Stelle der Farblamelle von der Mitte hin zu der schlechter benetzbaren Seite, und es tritt eine asymmetrische Spaltung auf. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts zeigen die Abb. 1.8 a) bis f) Sequenzen von Spaltungsvorgängen, die - allerdings bei

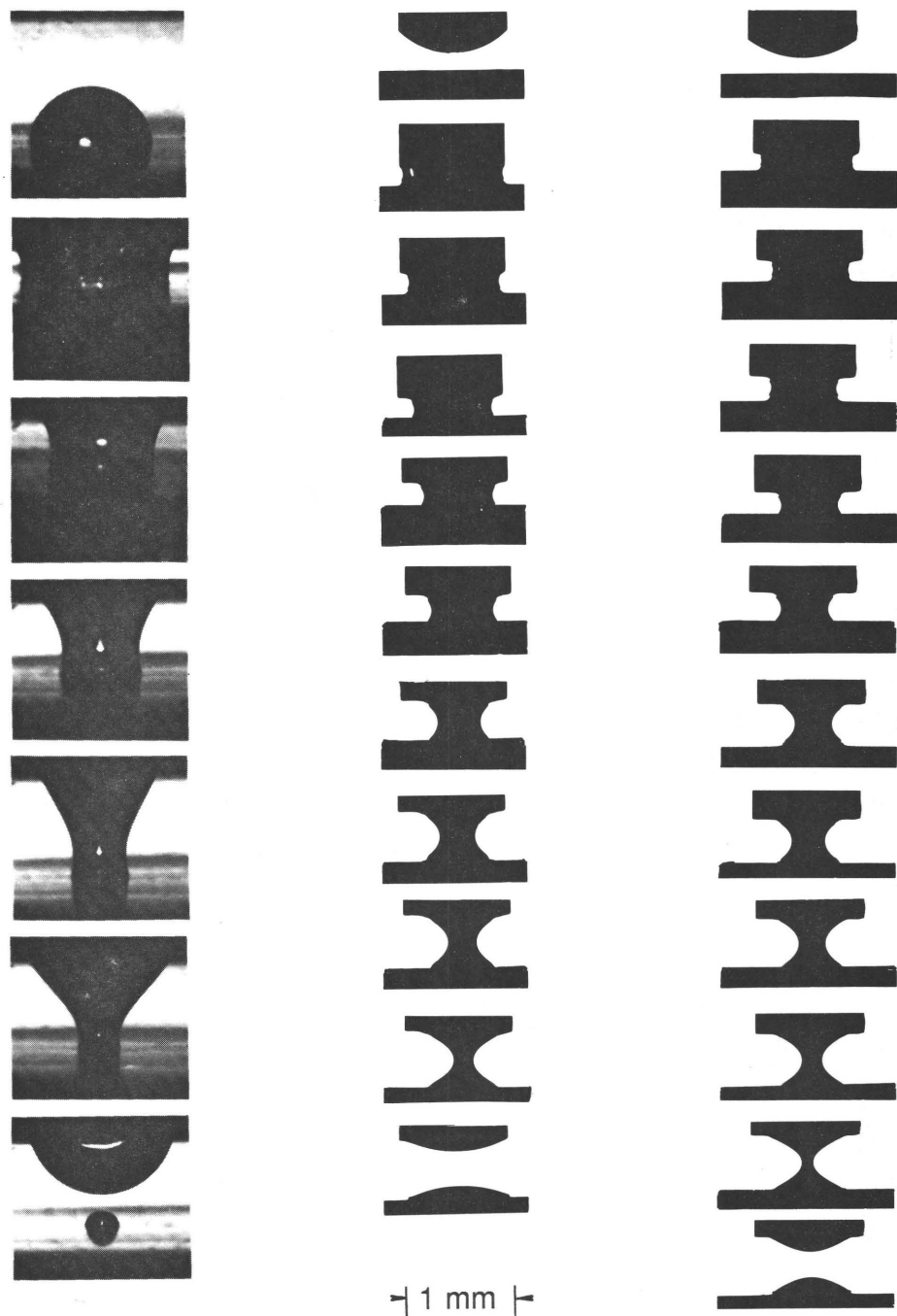


Abb. 1.8 d) e) f)
Beispiele für Flüssigkeitsspaltung der zweiten Klasse
Kombinationen: d) Teflon / Formamid / Stahl
e) Stahl / Öl / Stahl
f) Stahl / Offsetfarbe / Stahl

sehr niedrigen Trenngeschwindigkeiten um 1mm/s- im Mikroskop fotografiert wurden.

In nur wenigen Ausnahmefällen trennen sich die Flüssigkeit und einer der beiden Festkörper in ihrer Berührebene. Dabei findet natürlich auch keine Farbübertragung statt. In speziellen technischen Anwendungen ist dies sogar erwünscht, wie z.B. im Fall der nichtdruckenden Stellen beim wasserlosen Flachdruck. Voraussetzungen für diese Trennung wären Randwinkel größer als 90°, die aber in keinem der hier untersuchten Fälle von Farbtrennvorgängen auftraten.

2. Farbspaltungsvorgänge und Flüssigkeitsbrücken in der Literatur

Obwohl das wichtigste Druckverfahren, das Flachdruckverfahren, allein auf der Basis grenzflächenphysikalischer Vorgänge funktioniert, findet man von drucktechnischer Seite nur wenige Veröffentlichungen, die sich mit den Auswirkungen dieser Effekte auf die Farbspaltung (insbesondere derjenigen der zweiten Klasse) eingehend theoretisch beschäftigen.

Wenn sich bisher Autoren aus dem Bereich der Drucktechnik mit Farbübertragungsprozessen beschäftigten, untersuchten sie nämlich zumeist experimentell die Farbübertragung im Walzenspalt von voll eingefärbten Farbwerkswalzen (Schichtspaltung). Daß dabei die Einflüsse der Grenz- und Oberflächenkräfte, wie eingangs erwähnt, außer acht gelassen werden können, wird durch die umfangreichen Messungen von Wiesner und Scheuter /1/ bewiesen. Sie fanden heraus, daß bei homogenen Farbflüssigkeiten im Falle hinreichend glatter Walzen (gleich welchen Walzenmaterials) das Schichtdickenverhältnis am Spaltauslauf immer 1:1 beträgt, wenn die Walzen mit gleicher Oberflächengeschwindigkeit laufen. Dagegen wird die hälftige Spaltung bei Flüssigkeitsgemischen, wie sie beim Flachdruck in Form von Farb-Wasser-Gemischen vorliegen, durch unsymmetrische Verteilungen der Gemischkomponenten am Spalteinlauf gestört, so daß eine unsymmetrische Gemischspaltung auftritt. Weitgehend sind dafür die verfahrensbedingten rheologischen und grenzflächenphysikalischen Unterschiede der beiden Flüssigkeiten verantwortlich.

Bei Walzen mit unterschiedlicher Oberflächengeschwindigkeit tritt eine unsymmetrische Spaltung auf, was in der Praxis als Dosiereffekt genutzt wird.

Erwähnenswert ist im Zusammenhang mit der Schichtspaltung noch die Arbeit von Gudehus /2/, in der eine gute Näherung für die Schichtspaltung durch eine geschlossene Lösung der stationären (auftretende freie Oberfläche als ortsfest angenommen) Navier-Stokesschen Gleichungen (für Newtonsche Flüssigkeiten) unter Vernachlässigung der Trägheitskräfte erarbeitet wird. Diese Art von Strömung wird auch als "Stokessche oder schleichende Strömung" bezeichnet. Besonders interessant ist in dieser Arbeit neben der erstmaligen Berücksichtigung der Verformung der beteiligten Elastomerwalze die Erörterung der Frage nach der Bedingung für die Lage der Trennstelle der Flüssigkeit im Spaltauslauf. Da in der Flüssigkeit ein bestimmter Druck nicht unterschritten werden darf, weil sonst theoretisch Kavitation auftreten müßte, nennt Gudehus diese Art der Farbspaltung "kavitative Spaltung". In der Praxis ist die Spaltstelle nicht ortsfest, sondern man beobachtet eine statistisch verteilte Ausbildung von unzähligen kleinen Farbfäden und -lamellen. Das Zerreißen dieser Gebilde und die möglichen Kavitationseffekte sind für ein weiteres Phänomen der Farbspaltung verantwortlich, nämlich die Abstrahlung von Schallwellen aus dem Auslauf des Walzenspaltes. Aufgrund der geringen Abmessungen der Einzelschallquellen liegt das Maximum der abgestrahlten Schallenergie im Ultraschallbereich (Hübner und Scheuter/3/).

Zur Spaltung der Flüssigkeit mit all den Begleiterscheinungen ist Arbeit notwendig, die vom Farbwerk verrichtet werden muß. So wurde schon oft die Frage nach der zur Farbspaltung notwendigen Kraft bzw. im rotativen Fall nach dem notwendigen Drehmoment gestellt. Da es bisher trotz vieler Bemühungen nicht gelang, die Vorgänge bei der Farbspaltung (insbesondere derjenigen der zweiten Klasse) hydrodynamisch vollständig zu beschreiben, was einen Zusammenhang zwischen den gesuchten Größen und den viskosimetrisch leicht meßbaren rheologischen Eigenschaften der Farbflüssigkeiten herstellen würde, beschränkte man sich auf Abschätzungen und grobe Näherungen. So wird in diesem Zusammenhang immer wieder die Arbeit des Österreichischen Naturwissenschaftlers Stefan /4/ aus dem Jahre 1874 zitiert. Stefan untersuchte die Strömung beim Auseinanderziehen zweier voll in Flüssigkeit eingetauchter Platten und erarbeitete dazu eine Theorie, auf welche später (s. Kap. 5.5) näher eingegangen wird.

Die Adaption der Stefanschen Theorie auf die drucktechnischen Gegebenheiten wird oft unzureichend durchgeführt, da Stefan das Problem der Plattenseparation bei konstanter Trennkraft (über ein Gewicht) untersuchte, beim Farbspaltungsvorgang in der Drucktechnik wird dagegen der Plattenweg einge-

prägt. Stefans Näherungsformel (2.1) für die von ihm nicht weiter definierte "Trennzeit" t_s der Platten wird oft nach der Trennkraft F (bei Stefan konstant!) aufgelöst und falsch als Kraft-Zeit-Verlauf interpretiert (R_0 Plattenradius, η Viskosität, h_0 Plattenabstand bei $t=0$).

$$t_s = \frac{3}{4} \frac{\pi \eta R_0^4}{F h_0^2} \quad (2.1)$$

Zur experimentellen Klärung der Frage nach der Spaltkraft wurden Geräte und Apparate mit den unterschiedlichsten Wirkungsweisen gebaut (Übersicht in /5/). Sie werden Tackmeter genannt, was von dem englischen Wort "Tack" für Klebrigkeit (Stefan: "scheinbare Adhäsion" !) stammt.

Der Tackwert ist eine stark geometrieabhängige Kraftgröße und stellt keine Materialkonstante dar. Deshalb haben sich in der Praxis einige wenige Standard-Tackmeter durchgesetzt, die somit lediglich produktvergleichende Aussagen zulassen. Die meisten dieser Geräte arbeiten rotativ und simulieren die Schichtspaltung voll eingefärbter Walzen. Die Meßgröße ist das für die Rollbewegung notwendige, von der Farbspaltung beeinflusste Drehmoment.

Die drucktechnischen Gegebenheiten bei den Farbspaltungsvorgängen der zweiten Klasse simulieren am besten Tackmeter-Entwicklungen, deren Geometrie den bekannten Zugprüfgeräten der Werkstoffkunde ähnelt. Sie benutzen dazu zwei sich parallel gegenüberstehende Platten, welche die dazwischenliegende Farbe durch eine Normalbewegung spalten. Diese Geräte werden Parallel-Platten-Tackmeter (PPT) genannt /6/. Die mit Hilfe dieser Geräte gemessenen Spaltkraftverläufe werden in Kap. 5.5 mit den aus der Stefanschen Theorie gerechneten verglichen und näher diskutiert.

Bisher wurden noch keine Untersuchungen darüber angestellt, in welchen Mengen- oder Volumenverhältnissen sich die Ausgangsvolumina im PPT spalten, und wie sich die grenzflächenphysikalischen Materialeigenschaften dabei auswirken.

Obwohl der Farbspaltungsprozeß in der Tat ein transienter (=schneller, instationärer) Vorgang ist, können bereits aus Überlegungen zu statischen Flüssigkeitsbrücken wesentliche Aspekte zum Einfluß der grenzflächenphysikalischen Effekte abgelesen werden. Deshalb behandelt die vorliegende Arbeit zunächst den Fall (quasi) statischer Flüssigkeitsbrücken und dann erst den vollen dynamischen Prozeß der Flüssigkeitsspaltung.

Flüssigkeitsbrücken treten nicht nur in der Drucktechnik auf, sondern auch aus anderen Gebieten der Technik sind Untersuchungen über solche Phänomene

bekannt. Neben älteren, grundlegenden mathematischen Abhandlungen über die minimalen Volumina von Rotationskörpern bei gegebener Oberfläche und deren Stabilität (wie z.B. die besonders erwähnenswerte Arbeit von Howe /7/ aus dem Jahre 1887, aufgegriffen und verfeinert von Gillette und Dyson /8/), findet man in jüngerer Zeit Arbeiten über Flüssigkeitsbrücken im Bereich

- der Herstellung von Reinstkristallen,
- des Sinterns und
- der Beseitigung von Unreinheiten in hochschmelzenden Materialien.

Obwohl bei den meisten dieser Verfahren ein Erhitzen der Materialien bis zur Schmelze eine Rolle spielt, und die Flüssigkeitsbrücke in der Regel Schmelztemperatur hat, werden immer wieder nur die isothermen, rein statischen Modelle herangezogen. Bei den Arbeiten zu der Problematik des Kristallzüchtens (aus der sog. "Floating Liquid Zone") und der Purifizierung von Materialien interessiert die überwiegend spanischen Autoren vor allem die Stabilität der Kontur der Flüssigkeit. Um bei der Herstellung hochreiner Materialien mit Hilfe von Flüssigkeitsbrücken den störenden Einfluß der Gravitation auszuschließen, wurden dazu sogar Experimente in der Schwerelosigkeit des Alls (im amerikanischen Spacelab) durchgeführt. Die dort erzielten Ergebnisse stimmen, wie Meseguer u. a. /9/ berichten, mit der Theorie recht gut überein. Die Theorie dazu, die die Form und die Stabilität der Kontur der Flüssigkeitsbrücken bei konstanten Tropfenrandradien beschreibt, wird beispielsweise von Martinez und Perales /10/ und Fortes /11/ (basiert auf /7/ und /8/) teilweise auch numerisch behandelt. Die Berechnung der Kontur ist im wesentlichen identisch mit dem -hier im Kap. 4 behandelten- auf die Anwendung in der Drucktechnik übertragenen Modell. Eine übersichtsartige Zusammenstellung der bisherigen Untersuchungen findet man bei Martinez in /12/.

Bei den Arbeiten aus dem Anwendungsbereich des Sinterns interessiert vor allem die Frage nach der durch die Flüssigkeitsbrücke übertragbaren Kraft. Diese Kraft hält zwei durch die Brücke verbundene Partikel zusammen, die der Einfachheit halber im Modell als kleine Kugeln angenähert werden. Hier stehen experimentelle (Hwang u.a. /13/) und rein numerische Arbeiten (De Bisshop und Rigole /14/) im Vordergrund, wobei auch die Frage nach der Stabilität aus dem Vorhandensein von numerischen Lösungen hergeleitet wird.

Für die Form der Kontur der Flüssigkeitsbrücke sind hauptsächlich im statischen, aber auch im dynamischen Fall die Bedingungen an den bei den Farbspaltungsvorgängen der zweiten Klasse auftretenden Dreiphasenkontaktstel-

len ausschlaggebend. Im asymmetrischen Fall unterschiedlicher Materialien an den Platten (vgl. z.B. Abb. 1.8 b und d) bestimmen sie allein die für die Drucktechnik wichtige Mengenverteilung nach erfolgter Spaltung der Flüssigkeitsbrücke. Die entscheidenden Randwinkel an den Dreiphasenkontaktstellen wurden bisher häufig nur an sitzenden Tropfen untersucht, deren Position sich nicht veränderte. Hier gibt es unzählige Veröffentlichungen mit Meßdaten. Für drucktechnisch relevante Materialien untersuchten Steidel, Urban und Joppien /15/ Randwinkel, um daraus (mit einer richtungsweisenden, neuen Auswertemethode) Rückschlüsse auf die wichtige Oberflächenspannung der Festkörpermateriale ziehen zu können.

Im dynamischen Fall kann sich die Kontaktstelle (z.B. bei Vergrößerung des Tropfens durch Injektion von Flüssigkeit) verschieben, wobei bei Umkehr der Verschiebungsrichtung ein Hystereseeffekt auftreten kann. Man unterscheidet dann Vorrück- und Rückzugsrandwinkel. Im allgemeinen hängen die Randwinkel von der Verschiebegeschwindigkeit der Dreiphasenkontaktstelle ab. Eine Übersicht über die Problematik der Probleme mit dynamischen Randwinkeln gibt Davis in /16/ und Huh und Scriven in /17/.

Huh und Scriven versuchen, die Strömung im Bereich von dynamischen Dreiphasenkontaktstellen analytisch zu beschreiben, und finden dabei basierend auf Moffat /18/ Singularitäten an den Dreiphasenkontaktstellen. Die Singularitäten treten auf, da der Druck in den Ecken der Kontaktstellen eine $1/r$ -Abhängigkeit zeigt. Auf Methoden, die Singularitäten zu umgehen, und auf die Problematik der dynamischen Kontaktwinkel wird in Kap. 5.3.3 näher eingegangen.

Für hinreichend schlanke Flüssigkeitsbrücken mit konstanten Grundradien entwickelt Meseguer /19/ ein eindimensionales theoretisches "Scheibchen"-Modell für niedrig viskose Fluide und löst die reibungsfreien hydrodynamischen Gleichungen unter der vereinfachenden Annahme, daß das Druck- und das Geschwindigkeitsfeld im Innern der Flüssigkeitsbrücke nicht von der radialen Koordinate abhängen. Da sich Meseguer wiederum mit dem Problem des "Kristallzüchtens" beschäftigt, prägt er keine äußeren Geschwindigkeiten ein und untersucht mit der gefundenen Lösung die Stabilität der Kontur. Für die in der vorliegenden Arbeit zu behandelnden Probleme der Farbspaltung kann aber die Annahme schlanker Flüssigkeitsbrücken nicht generell getroffen werden. Erst wenn sich beim Farbspaltungsvorgang ein länglicher Farbfaden gebildet hat, wären die geometrischen Voraussetzungen zur Anwendung dieser Theorie gegeben.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bisher eine analytische Untersuchung des Farbspaltungsvorgangs unter besonderer Berücksichtigung des Problems der freien Oberflächen und der dynamischen Effekte an Dreiphasenkontaktstellen fehlt.

3. Modellbildung

Druckfarben bestehen im wesentlichen aus folgenden Bestandteilen:

- Farbgebende Pigmente
- Farblose Verschnitt-Pigmente
- Bindemittel
- Hilfsstoffe

Die mittlere Primärteilchengröße der Pigmente liegt bei ca. 0,2 μm , doch können in der fertig dispergierten Druckfarbe auch Aggregate und Agglomerate der Größenordnung bis 1 μm auftreten.

Die Bindemittel bestehen aus in Lösemitteln gelösten, natürlichen und/oder synthetischen Harzen und Firnissen.

Unter Hilfsstoffen finden sich Wachse, Regulative für die Rheologie, Dispergierhilfsmittel, Emulgatoren, Weichmacher, Trockenstoffe und vieles mehr.

Die Grundrezeptur der Druckfarben richtet sich weitgehend nach den von den Druckverfahren geforderten Fließeigenschaften.

Die folgenden Angaben geben einen Überblick:

Hoch- und Flachdruckverfahren

Nenn-Zähigkeit 3-30 Pas

Siedepunkte der Lösemittel 250-500°C

Rezeptur (in Gewichtsprozenten):

Farbgebende Pigmente	10-23%
Verschnitt-Pigmente	0-10%
Bindemittel	65-80%
Hilfsstoffe	0-10%

Der Pigment-Volumenanteil liegt unter 15% und der Lösemittelanteil um 35%.

Tief- und Flexodruckverfahren

Nenn-Zähigkeit	ca 0,02 Pas
Siedepunkte der Lösemittel	75-110°C
Rezeptur (in Gewichtsprozenten):	
Farbgebende Pigmente	6-10%
Verschnitt-Pigmente	0-4%
Bindemittel	85-90%
Hilfsstoffe	0-4%

Der Pigment-Volumenanteil liegt unter 6% und der Lösemittelanteil um 50%.

Das Fließverhalten dieser Druckfarben ist sehr unterschiedlich.

Hoch- und Flachdruckfarben weisen ausgeprägte Nicht-Newtonsche Eigenschaften auf, wie Strukturviskosität, Viskoelastizität und Thixotropie. Letztere spielt jedoch bei der Farbspaltung der zweiten Klasse eine vernachlässigbare Rolle, weil die Farbe bei dem Weg durch das Walzenfarbwerk eine Scherungsgeschichte erleidet, bei der die Thixotropie abgebaut werden kann.

Tief- und Flexodruckfarben sind im Gegensatz dazu weitgehend Newtonsche Flüssigkeiten.

Beiden Flüssigkeiten ist jedoch gemeinsam, daß sie Suspensionen sind.

Um bei dem Versuch einer analytischen Untersuchung der Farbspaltungsvorgänge überhaupt zu lösbaren Ansätzen zu kommen, müssen die Druckfarben idealisiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Druckfarbe vereinfachend als homogene Phase angenommen, für die ein einheitliches Materialgesetz angegeben werden kann. Dies ist insofern eine starke Vereinfachung, da damit gefordert wird, daß die Festkörperanteile (Pigmente) die Strömung nicht merklich beeinflussen. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Teilchengrößen im Vergleich zu den äußeren Längen klein sind und der Pigment-Volumenanteil ebenfalls klein ist.

Ferner werden für die analytische Behandlung die Rauigkeiten der beteiligten Farbträgeroberflächen vernachlässigt, obwohl die auftretenden Rauhtiefen durchaus in der Größenordnung der Farbschichtdicken liegen können.

Weiterhin wird der Farbspaltungsvorgang als isotherm vorausgesetzt.

Im allgemeinen Fall der Farbübertragung durch aufeinander abrollende Walzen ist das Problem der Spaltung eines abgeschlossenen Farbvolumens drei-

dimensional ohne jegliche vereinfachende Symmetrieeigenschaften. Dies soll in der unmaßstäblichen Skizze Abb. 3.1 verdeutlicht werden.

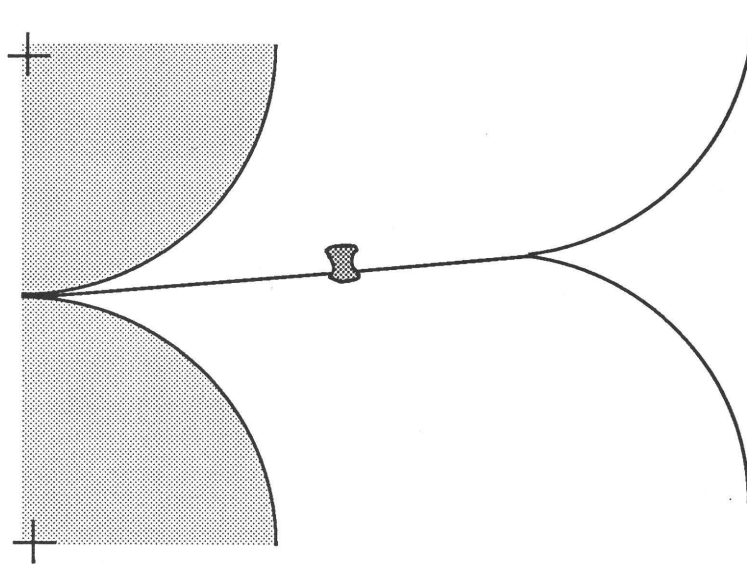


Abb. 3.1 Farbspaltung: dreidimensionales Problem

Unter der Voraussetzung, daß die Abmessungen der Tropfen sehr klein sind gegen die Walzenradien, läßt sich eine Reduktion des Problems auf eine rotationssymmetrische Betrachtungsweise vornehmen. Dafür erscheint es zulässig, folgendes anzunehmen:

- ebene Farbträgeroberflächen
- Trennvorgang durch reine Normalbewegung der Platten
- kreisrunde Grundflächen.

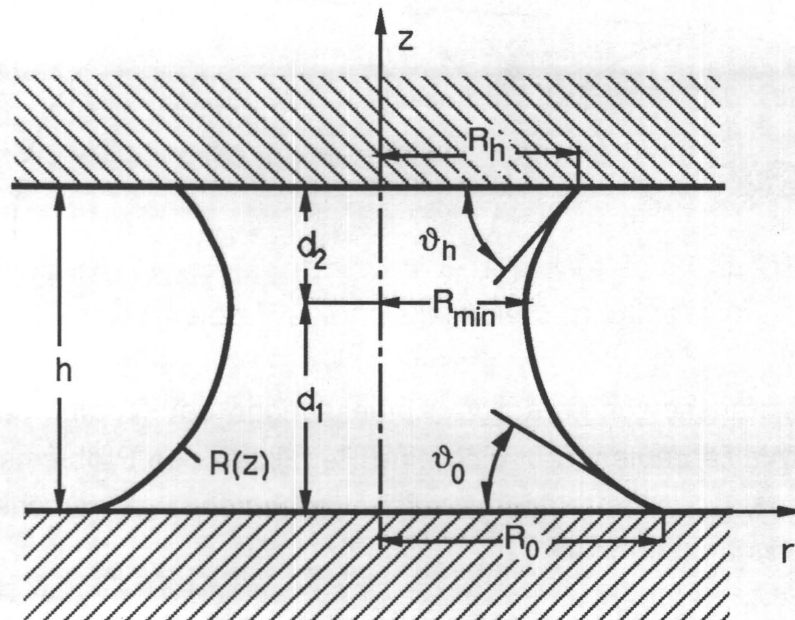
Die letzte Annahme ist in der Drucktechnik normalerweise für Rasterpunkte erfüllt. Dort, in den sog. Halbtonwerten, machen sich auch Schwankungen in der Farbübertragung stärker bemerkbar als bei reinen Stricharbeiten.

Als letzte generelle Annahme falle die Wirkrichtung der Gravitation, soweit sie berücksichtigt wird, mit der Richtung der z-Achse zusammen.

Mit all diesen Annahmen wird das Problem rotationssymmetrisch, und man erreicht durch Einführen von Zylinderkoordinaten r , φ und z die Reduktion auf ein zweidimensionales Problem, da sich kein Parameter in φ -Richtung ändert.

Dabei wird weiterhin vorausgesetzt, daß die Haftung der Flüssigkeit an den ebenen Wänden so groß ist, daß sich die Lage der Symmetrieachse des Tropfens nicht durch seitliches Wegwandern verändert. Stellt man sich beispielsweise einen Quecksilbertropfen vor, der zwischen den Platten eine Pressung erfährt, wird er bei der geringsten Abweichung von der Planparallelität sofort seinen Ort verändern.

Das den weiteren Überlegungen zu Grunde liegende Modell ist in Abb. 3.2 skizziert.



Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind deshalb insbesondere für Hoch- und Flachdruckfarben nur als erste Näherungen zu verstehen.

4. Der statische Zustand

Die die Farbspaltung beeinflussenden Mechanismen setzen sich, wie bereits eingangs erwähnt, aus den hydrostatischen (Gravitation), den bewegungsinduzierten (Reibungs- und Trägheitskräfte) und den aus den Ober- und Grenzflächenerscheinungen entstehenden Kräften zusammen. Um die Einflüsse der Ober- und Grenzflächenkräfte separat studieren zu können, sei zunächst die Bewegung so langsam ausgeführt, daß die bewegungsinduzierten Kräfte vernachlässigt werden können. Die zur Farbspaltung führende Bewegung erfolgt quasi unendlich langsam, und in jedem Moment herrscht ein statisches Kräftegleichgewicht. Sobald ein solches Gleichgewicht nicht mehr existiert, muß die Spaltung erfolgen.

4.1 Herleitung der Grundgleichung für das Gleichgewicht

Zur Herleitung der Bedingung für die Gleichgewichtslage dient Abb. 4.1.

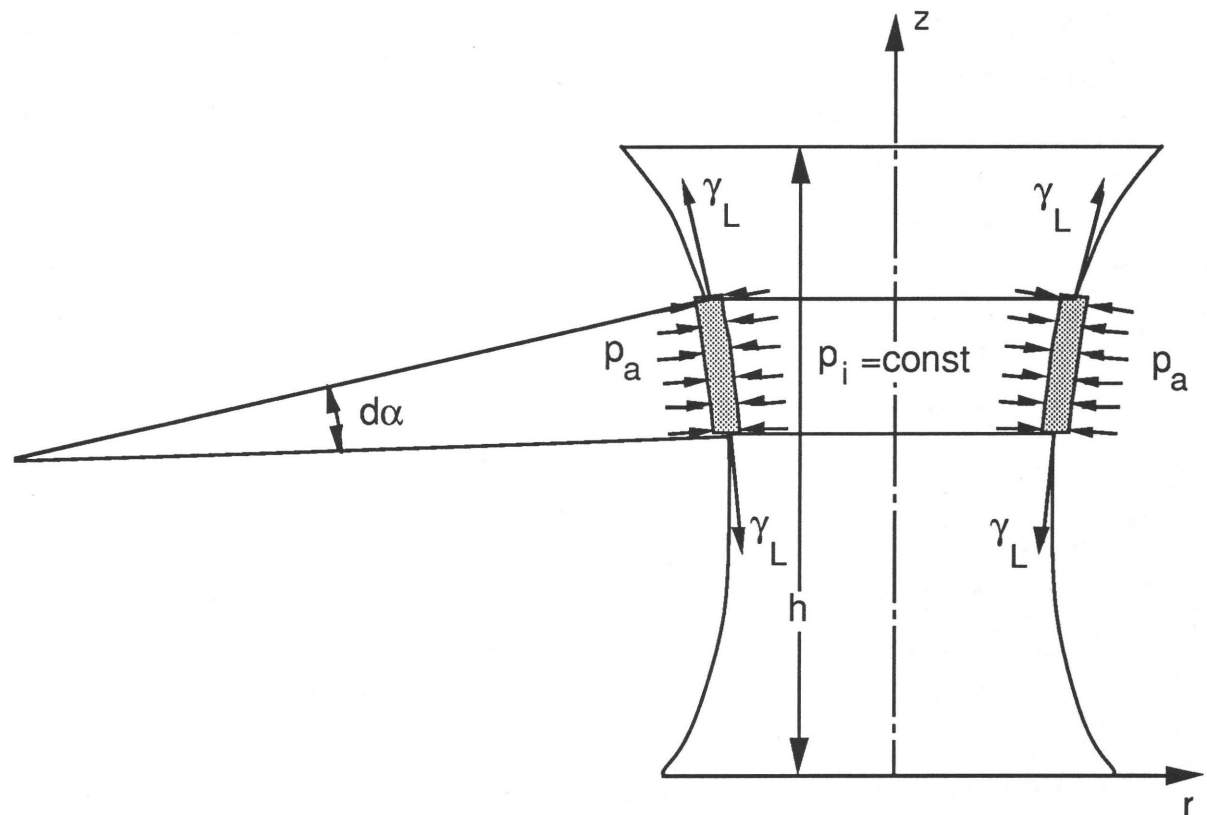


Abb. 4.1 Schnittkräfte am Oberflächenringelement

Ist die gesamte Kontur im Gleichgewicht, herrscht auch Gleichgewicht am Oberflächenelement. Dabei wirken die durch die Oberflächenspannung erzeugten Kräfte tangential zur Berandungskurve $R(z)$. Die zu berücksichtigenden Winkel α und $d\alpha$ sind in der Ausschnittsvergrößerung Abb. 4.2 zu erkennen. Innerhalb des Winkels $d\alpha$ habe die Berandung eine konstante Krümmung mit dem Kurvenkrümmungsradius R_1 .

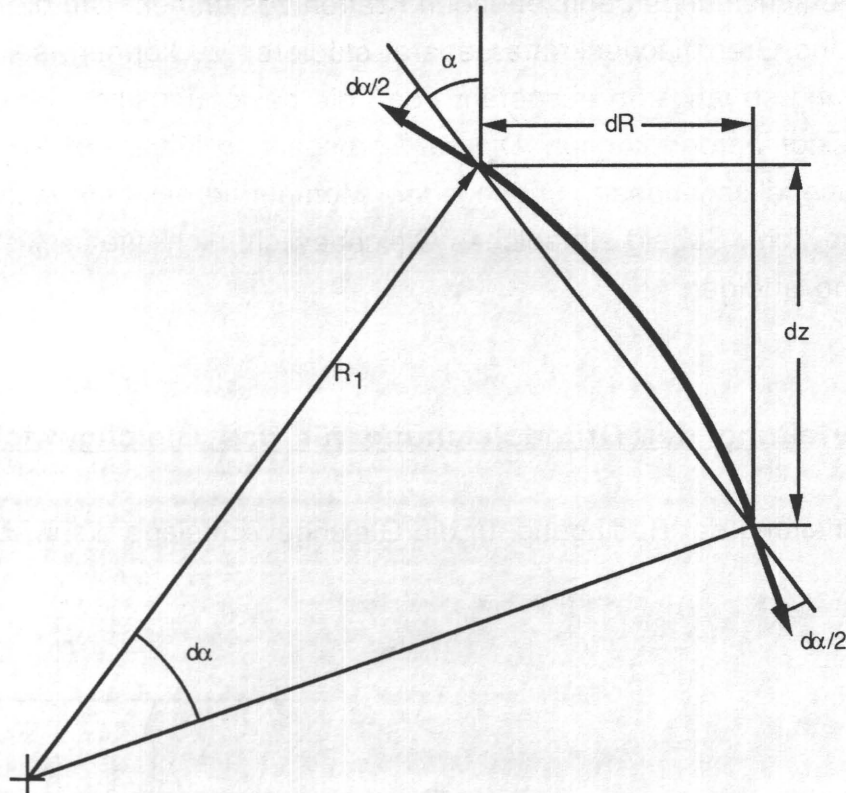


Abb. 4.2 Ausschnittsvergrößerung aus Abb. 4.1 (nicht maßstäblich)

Das Kräftegleichgewicht am ringförmigen Oberflächenelement von verschwindender Dicke (Gewichtskraft gegen Null) lautet in z -Richtung:

$$-2\pi R \gamma_L \cos\left(\alpha - \frac{d\alpha}{2}\right) + 2\pi(R+dR) \gamma_L \cos\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right) + (p_a - p_i) 2\pi R \sqrt{dR^2 + dz^2} \sin\alpha = 0 \quad (4.1)$$

Dabei ist

- p_a = Außendruck ($\approx 1 \text{ bar}$)
- γ_L = Oberflächenspannung der Flüssigkeit ($L = \text{Liquid}$)
- p_i = Innendruck

Der Einfluß der Gravitation macht sich aber über den Innendruck p_i bemerkbar. In p_i ist nämlich zusätzlich noch der hydrostatische Druck $\rho g z$

$$p_i = p_0 - \rho g z \quad (4.2)$$

enthalten, der aus der Gravitationskraft des Erdschwerefelds herrührt. Dabei ist mit ρ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet, p_0 ist der Innendruck an der Stelle $z=0$, und g ist die Erdbeschleunigung. Somit ist p_i noch von der Koordinate z abhängig.

Nach Anwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen folgt aus Gleichung (4.1):

$$-\gamma_L R \left(\cos \alpha \cos \frac{d\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{d\alpha}{2} \right) + \gamma_L (R+dR) \left(\cos \alpha \cos \frac{d\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{d\alpha}{2} \right) + (p_a - p_i) R \sqrt{dR^2 + dz^2} \sin \alpha = 0 \quad (4.3)$$

Nach weiteren Umformungen unter der Voraussetzung kleiner Winkel $d\alpha$, d.h. $\sin(d\alpha) = d\alpha$, folgt:

$$\gamma_L \left[1 - R \frac{d\alpha}{dz} \right] + (p_a - p_i) R \sqrt{R'^2 + 1} = 0 \quad (4.4)$$

Dabei wurde benutzt:

$$R' = \frac{dR}{dz} = \tan \alpha \quad (4.5)$$

Zur Bestimmung von $d\alpha$ verwendet man den Zusammenhang zum Krümmungsradius R_1 der Kurve:

$$d\alpha = \frac{1}{R_1} ds \quad (4.6)$$

Das Bogenstück ds ist unter Vernachlässigung differentieller Größen höherer Ordnung gleich der Hypotenuse des Dreiecks α , dR , dz :

$$ds = \sqrt{dR^2 + dz^2} = dz \sqrt{R'^2 + 1} \quad (4.7)$$

Aus der Differentialgeometrie der Kurven ist die Gleichung des Krümmungsradius R_1 bekannt:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\frac{d^2 R}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dR}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{R''}{(1 + R'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.8)$$

Somit wird:

$$d\alpha = dz \frac{R''}{(1 + R'^2)} \quad (4.9)$$

Setzt man dies schließlich in Gleichung (4.4) ein, erhält man

$$\frac{p_i - p_a}{\gamma_L} = - \frac{R''}{(1 + R'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{R(1 + R'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.10)$$

Gleichung (4.10) ist identisch mit der auf Laplace (siehe z.B. bei Wolf /21/) zurückreichenden Formel für den durch die Krümmatur einer Oberfläche entstehenden Drucksprung:

$$\frac{p_i - p_a}{\gamma_L} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.11)$$

R_1 und R_2 werden die Hauptkrümmungsradien einer Oberfläche genannt und befinden sich in aufeinander senkrecht stehenden Ebenen (R_1 liegt immer in einer durch $\varphi = \text{const.}$ definierten Meridianebene). Für den vorliegenden rotationssymmetrischen Fall sind also:

$$\frac{1}{R_1} = - \frac{R''}{(1+R'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R(1+R'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.12)$$

Schreibt man Gleichung (4.10) um,

$$R'' = - \frac{p_i - p_a}{\gamma_L} (1+R'^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{R} (1+R'^2) \quad (4.13)$$

erkennt man, daß es sich um eine Differentialgleichung für die unbekannte Konturkurve $R(z)$ handelt. Die DGL ist von zweiter Ordnung und stark nichtlinear. Auf der rechten Seite taucht die Variable z nicht explizit auf, sie steckt lediglich in der Größe p_i (s. Gleichung 4.2).

4.2 Einfluß der Gravitation

Wie später gezeigt wird, kann man Gleichung (4.13) lösen, wenn der Innendruck p_i eine Konstante ist. Ob dies näherungsweise zutreffend ist, soll folgende Überlegung zeigen.

Betrachtet man Gleichung (4.10), haben beide Seiten die Dimension eines Druckes. Um die Größenordnungen der verschiedenen Druckterme zu vergleichen, kann man beispielsweise Gleichung (4.11) durch den Term auf der rechten Seite dividieren. Berücksichtigt man dabei (4.2) folgt:

$$\frac{p_0 - p_a}{\gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} - \frac{\rho g z}{\gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = 1 \quad (4.14)$$

Der zweite Term in Gleichung (4.14) stellt nun quasi ein Verhältnis aus dem von der Gravitation erzeugten hydrostatischen Druck und dem Krümmungsdruck dar. Wenn man für z den Maximalwert $z_{\max} = h$ betrachtet und weiterhin h , R_1 und R_2 , die in etwa die gleiche Größenordnung haben, durch eine charakteristische Länge L ersetzt, wird der entstehende dimensionslose Ausdruck

gleich einer als Bondzahl Bo /22/ bekannten Größe. Ist sie wesentlich kleiner als 1, kann man die Gravitationskräfte vernachlässigen.

$$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma_L} \ll 1 \quad (4.15)$$

Da die Werte für g , ρ und γ_L bekannt sind und bei den in der Drucktechnik verwendeten Materialien nicht zu sehr variieren, kann man daraus wiederum abschätzen, bis zu welchen Größenordnungen die Vernachlässigung zulässig ist. Man formt um:

$$L \ll \sqrt{\frac{\gamma_L}{\rho g}} \quad (4.16)$$

Als charakteristische Werte können angenommen werden:

$$\rho \approx 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad 2,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}} \leq \gamma_L \leq 7,2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Die Rechnung mit dem kleinsten Wert für γ_L liefert für den ungünstigsten Fall $L \ll 0,0016 \text{ m}$. Bewegt man sich also in der Größenordnung deutlich unter 1 mm, darf man die Schwerkraft vernachlässigen. Als charakteristische Länge beim vorliegenden Problem kann beispielsweise der Plattenabstand h angesehen werden. Er liegt zwar in der Größenordnung der Schichthöhen in der Drucktechnik, also im allgemeinen um $10 \mu\text{m}$ und darunter, ist aber beim Trennvorgang zeitlich nicht konstant. Besser ist daher, die dritte Wurzel aus dem Tropfenvolumen als charakteristische Länge L zu benutzen, da das Gesamttropfenvolumen während der (hier betrachteten) Farbspaltungsvorgänge der zweiten Klasse konstant bleibt.

Zahlenbeispiel:

Ein verhältnismäßig großer Rasterpunkt habe einen Radius von $R_0 = 500 \mu\text{m}$ und $h = 10 \mu\text{m}$. Sein Volumen ist dann $V = \pi R_0^2 h = 0,008 \text{ mm}^3$. Die charakteristische Länge L rechnet sich daraus mit $L = \sqrt[3]{V} = 0,2 \text{ mm}$. Dieser Wert ist nur ein Sechstel der oben angegebenen Grenze für L .

Da die Rasterpunkte in der Regel eher wesentlich kleiner als in diesem Zahlenbeispiel sind, läßt sich schließen, daß die Gravitation hier keine Rolle spielt, und somit p_i für den statischen Fall in guter Näherung als konstant angenommen werden kann.

4.3 Herleitung der Gleichgewichtsbedingung aus dem Energieprinzip

Eine weitaus allgemeinere Herleitung der Bedingungen für das Gleichgewicht der Tropfenkontur als in Kapitel 4.1 erhält man aus einer energetischen Betrachtung. Ein System befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn seine potentielle Energie einen Extremwert annimmt. Eine andere Formulierung dieses Sachverhalts lautet, daß die erste Variation der potentiellen Energie verschwinden muß:

$$\delta E_{\text{pot}} = 0 \quad (4.17)$$

Da das Potential des Erdschwerefeldes vernachlässigt werden kann, sind die einzigen im vorliegenden Fall auftretenden potentiellen Energien die Oberflächenenergien. Allgemein wird die potentielle Energie der Oberflächenspannung gebildet aus:

$$E_{\text{pot}} = \int_A \gamma dA \quad (4.18)$$

Da die Oberflächenspannung γ nicht von der Fläche abhängt, vereinfacht sich (4.18) zu:

$$E_{\text{pot}} = \gamma A \quad (4.19)$$

Sämtliche im Problem auftretenden Oberflächen sind in Abb. 4.3 dargestellt.

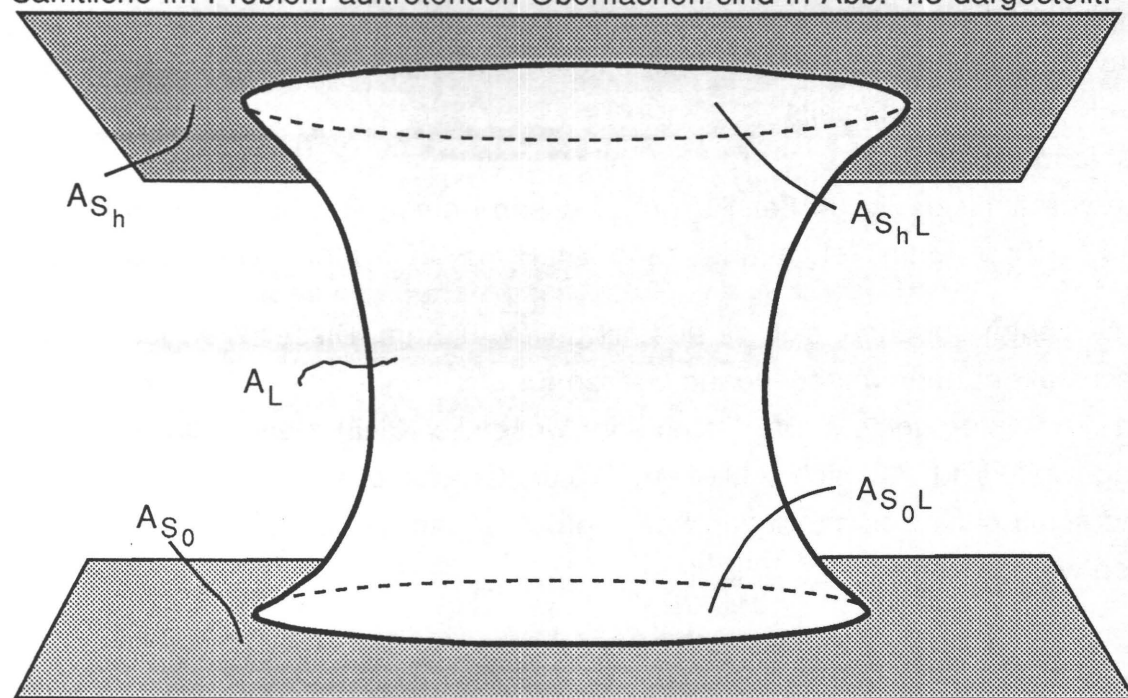


Abb. 4.3 Oberflächen am Tropfen und an den Festkörpern

Laut Abb. 4.3 muß die Gleichung für die gesamte potentielle Energie heißen:

$$E_{\text{pot}} = \gamma_L A_L + \gamma_{S_0 L} A_{S_0 L} + \gamma_{S_0} A_{S_0} + \gamma_{S_h L} A_{S_h L} + \gamma_{S_h} A_{S_h} \quad (4.20)$$

mit:

- γ_L = Oberflächenspannung der Flüssigkeit (Liquid)
- γ_{S_0} = Oberflächensp. des Festkörpers bei $z=0$ (Solid)
- $\gamma_{S_0 L}$ = Grenzflächensp. zwischen Festkörper bei $z=0$ und Liquid
- γ_{S_h} = Oberflächensp. des Festkörpers bei $z=h$
- $\gamma_{S_h L}$ = Grenzflächensp. zwischen Festkörper bei $z=h$ und Liquid
- A_{ij} = zugehörige Flächen

Da die Oberflächenspannungen weder von der Größe der Fläche, noch der Lage der Oberfläche, noch von einer Druckgröße abhängig sind, reduziert sich die Suche nach der ersten Variation der potentiellen Energie auf die Bestimmung der ersten Variation der beteiligten Oberflächen.

$$\delta E_{\text{pot}} = \sum_i \gamma_i \delta A_i \quad (4.21)$$

Man erhält die erste Variation der Oberfläche beim Übergang von einer Ausgangslage zu einer Vergleichslage durch Annahme einer virtuellen Verrückung. An den Berandungen wird bei dieser Verrückung der Oberfläche offensichtlich der Zuwachs der Grenzfläche $A_{S_i L}$ gleich dem Flächenverlust von A_{S_i} , also:

$$\delta A_{S_i L} = - \delta A_{S_i} \quad (4.22)$$

und somit folgt aus (4.20):

$$\delta E_{\text{pot}} = \gamma_L \delta A_L + (\gamma_{S_0 L} - \gamma_{S_0}) \delta A_{S_0} + (\gamma_{S_h L} - \gamma_{S_h}) \delta A_{S_h} = 0 \quad (4.23)$$

Das Hauptproblem liegt nun in der Bestimmung des allgemeinen Ausdrucks für die erste Variation δA_L der Fläche A_L .

Zur Bestimmung dieser Größe muß man in Analogie zu den Berechnungen bei Finn /23/ und Myshkis u.a. /24/ vektorielle Überlegungen der Differentialgeometrie anwenden (z.B. /25/). Ist die Lage einer rotationssymmetrischen Fläche im Raum, der von den kartesischen Einheitsvektoren **i**, **j** und **k** aufgespannt wird, mit den beliebigen Parametern u und v gegeben durch den Ortsvektor **R** (im Text sind Vektoren durch Fettdruck gekennzeichnet)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R(v) \cos(u) \\ R(v) \sin(u) \\ z(v) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

bzw.

$$\mathbf{R} = R(v) \cos(u) \mathbf{i} + R(v) \sin(u) \mathbf{j} + z(v) \mathbf{k} \quad (4.25)$$

wird die Oberfläche bestimmt mit:

$$A = \int \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (4.26)$$

Die Größen E, G und F sind die sog. Fundamentalgrößen einer Fläche, sie sind definiert durch:

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right)^2 \quad (4.27)$$

$$G = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right)^2 \quad (4.28)$$

$$F = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \quad (4.29)$$

Für die beliebigen Parameter u und v werden hier zweckmäßigerweise die Koordinaten φ und z, also $u = \varphi$ und $v = z$, gewählt. So wird

$$\mathbf{R} = R \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \varphi \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (4.30)$$

und

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} \right)^2 = R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + 0 = R^2 \quad (4.31)$$

$$G = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right)^2 = R'^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 1 = R'^2 + 1 \quad (4.32)$$

$$F = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right) = R R' (-\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + 0 = 0 \quad (4.33)$$

$$EG - F^2 = R^2 (R'^2 + 1) \quad (4.34)$$

schließlich

$$A_L = \iint_{\varphi z} \sqrt{EG - F^2} \, dz \, d\varphi = \iint_{\varphi z} R \sqrt{R'^2 + 1} \, dz \, d\varphi \quad (4.35)$$

mit

$$R' = \frac{dR}{dz} \quad (4.36)$$

Die virtuelle Verschiebung der Oberfläche in eine Nachbarfläche A_L^* sei angenommen durch einen virtuellen Zuwachs zum Ortsvektor:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \delta\mathbf{R} \quad (4.37)$$

In Anlehnung an Blaschke /25/ (S. 241 ff.) kann der sehr kleine Verschiebungsvektor $\delta\mathbf{R}$ auch als das Produkt einer sehr kleinen Zahl ε und einem zu $\delta\mathbf{R}$ kollinearen Hilfsrichtungsvektor \mathbf{x} ausgedrückt werden, dessen Länge und Richtung ortsabhängig ist. Deshalb wird der Richtungsvektor \mathbf{x} zweckmäßigerweise in zwei Komponenten $\mu\mathbf{n}$ und $\nu\mathbf{t}$ zerlegt, wobei \mathbf{n} der Einheitsnormalenvektor der Tangentialebene im durch \mathbf{R} definierten Punkt der Konturkurve $\mathbf{R}(z)$ ist, und \mathbf{t} der Einheitstangentenvektor in der Tangentialebene und der Meridianschnittfläche entlang $\mathbf{R}(z)$:

$$\delta\mathbf{R} = \varepsilon\mathbf{x} = \varepsilon(\mu\mathbf{n} + \nu\mathbf{t}) \quad (4.38)$$

Nach der allgemeinen Formel für eine Oberfläche (4.26) wird die Nachbarfläche:

$$A_L^* = \iint_{\varphi z} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} \, dzd\varphi \quad (4.39)$$

Die Ausdrücke für E^* , F^* und G^* lassen sich mit den Richtungsableitungen des Hilfsvektors \mathbf{x} bilden. Dabei werden der Einfachheit halber die Ableitungen nach den Parametern z und φ durch Indizes gekennzeichnet (s. Vereinbarung unter der Rubrik "Formelzeichen"). Es wird somit:

$$E^* = (\mathbf{R}_\varphi + \varepsilon\mathbf{x}_\varphi)^2 = \mathbf{R}_\varphi^2 + 2\varepsilon\mathbf{R}_\varphi\mathbf{x}_\varphi + O(\varepsilon^2) \approx E + 2\varepsilon\mathbf{R}_\varphi\mathbf{x}_\varphi \quad (4.40)$$

$$F^* = (\mathbf{R}_\varphi + \varepsilon\mathbf{x}_\varphi)(\mathbf{R}_z + \varepsilon\mathbf{x}_z) = F + \varepsilon(\mathbf{R}_\varphi\mathbf{x}_z + \mathbf{R}_z\mathbf{x}_\varphi) + O(\varepsilon^2) \approx \varepsilon(\mathbf{R}_\varphi\mathbf{x}_z + \mathbf{R}_z\mathbf{x}_\varphi) \quad (4.41)$$

$$G^* = (\mathbf{R}_z + \varepsilon\mathbf{x}_z)^2 = \mathbf{R}_z^2 + 2\varepsilon\mathbf{R}_z\mathbf{x}_z + O(\varepsilon^2) \approx G + 2\varepsilon\mathbf{R}_z\mathbf{x}_z \quad (4.42)$$

Die Terme $O(\varepsilon^2)$ sind von höherer Ordnung klein und werden daher vernachlässigt. Die Variation der Oberfläche wird in Anlehnung an /23/ gebildet mit:

$$\delta A_L = \left. \frac{\partial A_L^*}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (4.43)$$

Führt man diese Operation aus, bleibt:

$$\delta A_L = \iint_{\varphi z} (EG)^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{G}\mathbf{R}_\varphi\mathbf{x}_\varphi + \mathbf{E}\mathbf{R}_z\mathbf{x}_z] \, dzd\varphi \quad (4.44)$$

Zur weiteren Auswertung von (4.44) benutzt man nun die Komponenten $\mu\mathbf{n}$ und $\nu\mathbf{t}$ von \mathbf{x} . Für einige der auftretenden Skalarprodukte sind in der Differentialgeometrie folgende Abkürzungen üblich:

$$\mathbf{R}_\phi \mathbf{n}_\phi = -L \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_z \mathbf{n}_z = -N \quad (4.45)$$

Wegen der Rotationssymmetrie ist

$$\frac{\partial \mu}{\partial \phi} = 0 \quad (4.46)$$

Somit erhält man:

$$\delta A_L = \iint_{\phi z} \sqrt{EG} \left\{ -\mu \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) + \frac{1}{EG} \left[G \mathbf{R}_\phi (\mathbf{v} \mathbf{t})_\phi + E \mathbf{R}_z (\mathbf{v} \mathbf{t})_z \right] \right\} dz d\phi \quad (4.47)$$

Mit der Identität

$$\frac{L}{E} + \frac{N}{G} = 2H = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.48)$$

(H ist das Gaußsche Krümmungsmaß oder mittlere Krümmung) und Aufspalten des Integrals in zwei Terme folgt:

$$\delta A_L = -2 \iint_{\phi z} H \sqrt{EG} \mu dz d\phi + \iint_{\phi z} \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[G \mathbf{R}_\phi (\mathbf{v} \mathbf{t})_\phi + E \mathbf{R}_z (\mathbf{v} \mathbf{t})_z \right] dz d\phi \quad (4.49)$$

Durch partielle Integration wird das zweite Integral in (4.49), I_2 genannt, auf ein Linienintegral längs des Flächenrandes und ein weiteres Flächenintegral zurückgeführt:

$$I_2 = \int \frac{\mathbf{v} \mathbf{t}}{\sqrt{EG}} (G \mathbf{R}_\phi dz - E \mathbf{R}_z d\phi) - \iint_{\phi z} \mathbf{v} \mathbf{t} \left[\left(\frac{G \mathbf{R}_\phi}{\sqrt{EG}} \right)_\phi + \left(\frac{E \mathbf{R}_z}{\sqrt{EG}} \right)_z \right] dz d\phi \quad (4.50)$$

Zur weiteren Auswertung der Integrale werden nun die entsprechenden Ausdrücke für E und G (4.31) bzw. (4.32) sowie die Vektoren \mathbf{t} , \mathbf{R}_ϕ und \mathbf{R}_z eingesetzt. Es ist

$$\mathbf{R}_\phi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = R \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{R}_z = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} = \begin{bmatrix} R' \cos \phi \\ R' \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Man benötigt ferner die zweiten Ableitungen des Vektors \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}_{\varphi\varphi} = -R \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{R}_{zz} = R'' \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Die noch fehlenden allgemeinen Ausdrücke für die Einheitsvektoren \mathbf{t} und \mathbf{n} folgen aus der Tatsache, daß \mathbf{R}_z die Lage der Tangentialebene definiert. Es ist

$$\mathbf{t} = - \frac{\mathbf{R}_z}{|\mathbf{R}_z|} \quad (4.55)$$

Das negative Vorzeichen basiert auf der in /26/ gegebenen Definition der positiven Richtung der Tangente. Der Ausdruck für \mathbf{t} lautet:

$$\mathbf{t} = - \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} \begin{bmatrix} R' \cos\varphi \\ R' \sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Da $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$ ist, und somit ihr Skalarprodukt gleich Null sein muß, wird:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -R' \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Setzt man (4.51-56) in (4.50) ein, verschwindet das rechte Integral in I_2 , und es bleibt:

$$I_2 = \int_{\varphi} v R d\varphi \quad (4.58)$$

Also ist die Variation der Oberfläche:

$$\delta A_L = - 2 \iint_{\varphi z} H \sqrt{EG} \mu dz d\varphi + \int_{\varphi} v R d\varphi \quad (4.59)$$

Das rechte Integral über φ zerfällt wiederum in zwei Anteile, nämlich in die Berandung an der Platte bei $z=0$ und die Berandung bei $z=h$. Es ist:

$$\int_{\varphi} v R d\varphi = \int_0^{2\pi} v_0 R_0 d\varphi + \int_0^{2\pi} v_h R_h d\varphi = 2\pi v_0 R_0 + 2\pi v_h R_h \quad (4.60)$$

wobei die Indizes 0 und h den Ort der Berandung $z=0$ bzw. $z=h$ kennzeichnen, und das Integral über φ bereits ausgeführt wurde.

Da sich die Fläche an der Berandung nur längs der Wand bewegen kann, müssen an der Wand anhand Abb. 4.4 bzw. der für den unteren Rand herausvergrößerten Skizze in Abb. 4.5 folgende geometrische Bedingungen gelten:

$$\cos \vartheta_0 = \frac{|\varepsilon v| |\mathbf{t}|}{|\delta \mathbf{R}|} \Big|_{z=0} = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_0^2 + v_0^2}} \quad (4.61)$$

$$\cos \vartheta_h = \frac{|\varepsilon v| |\mathbf{t}|}{|\delta \mathbf{R}|} \Big|_{z=h} = \frac{v_h}{\sqrt{\mu_h^2 + v_h^2}} \quad (4.62)$$

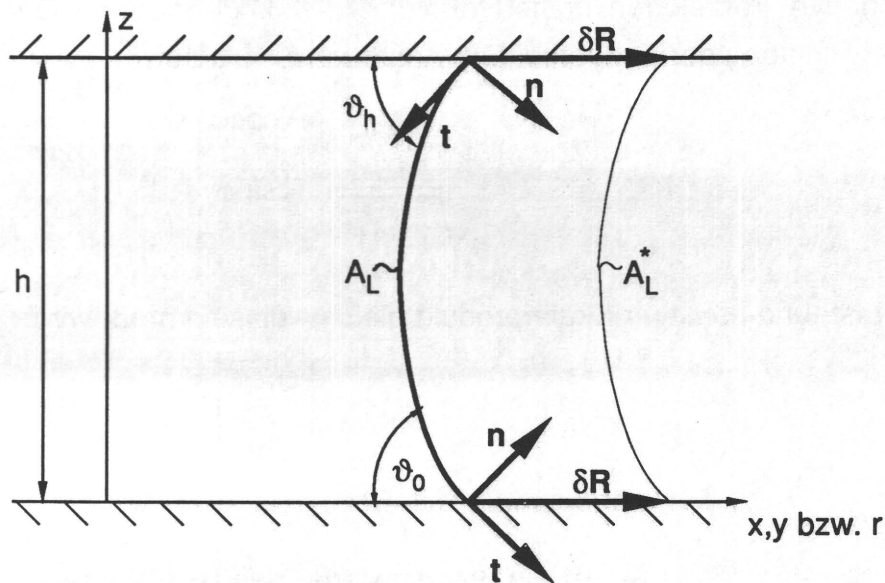


Abb. 4.4 Lage der Vektoren \mathbf{n} , \mathbf{t} und $\delta \mathbf{R}$ an der Berandung

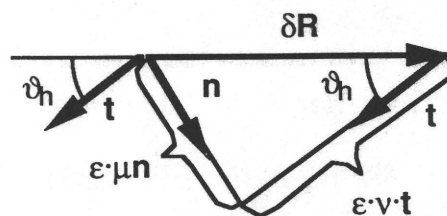


Abb. 4.5 geometrische Beziehung zwischen den Vektoren am Rand bei $z=h$

Dabei ist $|\delta \mathbf{R}|$ der Betrag des Vektors $\delta \mathbf{R}$ aus Gleichung (4.38), der Betrag des Einheitsvektors $|\mathbf{t}| = 1$, und die Indizes 0 und h geben die Lage der Berandung an. Schließlich wird die erste Variation der Oberfläche:

$$\delta A_L = -2 \iint_{\varphi z} H \sqrt{EG} \mu dz d\varphi + 2\pi R_0 \cos \vartheta_0 \sqrt{\mu_0^2 + v_0^2} + 2\pi R_h \cos \vartheta_h \sqrt{\mu_h^2 + v_h^2} \quad (4.63)$$

Um die Variation der potentiellen Energie vollständig bestimmen zu können, fehlt noch die Variation der Flächen A_{SiL} und A_{Si} . Beim Übergang zur Vergleichsfläche vergrößern sich A_{SiL} auf A_{SiL}^* . Man sieht leicht:

$$A_{S_0L}^* = \pi (R_0 + |\delta \mathbf{R}|_{z=0})^2 = \pi [R_0^2 + 2R_0 \epsilon \sqrt{\mu_0^2 + v_0^2} + O(\epsilon^2)] \quad (4.64)$$

$$A_{S_hL}^* = \pi (R_h + |\delta \mathbf{R}|_{z=h})^2 = \pi [R_h^2 + 2R_h \epsilon \sqrt{\mu_h^2 + v_h^2} + O(\epsilon^2)] \quad (4.65)$$

Vernachlässigt man wieder die Größe $O(\epsilon^2)$ und bildet

$$\delta A_{SiL} = \frac{\partial A_{SiL}^*}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \quad (4.66)$$

findet man:

$$\delta A_{S_0L} = 2\pi R_0 \sqrt{\mu_0^2 + v_0^2} \quad (4.67)$$

bzw.:

$$\delta A_{S_hL} = 2\pi R_h \sqrt{\mu_h^2 + v_h^2} \quad (4.68)$$

Bei der Variation der Oberflächen wurde noch nicht berücksichtigt, daß im Falle eines Flüssigkeitstropfens das Volumen konstant bleiben muß. Die Änderung des Volumens δV beim Übergang von der Ausgangsfläche A_L zur Vergleichsfläche A_L^* ist näherungsweise gleich der Oberfläche (vgl. Gleichung (4.26)) multipliziert mit dem Zuwachs μ in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n} .

$$\delta V \approx \iint_{\varphi z} \mu \sqrt{EG} dz d\varphi \quad (4.69)$$

Um dies in die Energiebetrachtung einzubinden, muß man Gleichung (4.69) mit einem sog. Lagrangeschen Parameter λ multiplizieren, der hier die Dimension eines Druckes haben muß, und deswegen λ_p genannt wird. Sammelt man nun unter Berücksichtigung von (4.23) die einzelnen Terme (4.63), (4.67), (4.68) und (4.69) für die Variation der potentiellen Energie zusammen, findet man:

$$\delta E_{\text{pot}} = \gamma_L \iint_{\varphi z} \left[\frac{\lambda_p}{\gamma_L} - 2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \mu \sqrt{EG} \, dz d\varphi + (\gamma_L \cos \vartheta_0 + \gamma_{S_0 L} - \gamma_{S_0}) 2\pi R_0 \sqrt{\mu_0^2 + v_0^2} \\ + (\gamma_L \cos \vartheta_h + \gamma_{S_h L} - \gamma_{S_h}) 2\pi R_h \sqrt{\mu_h^2 + v_h^2} = 0 \quad (4.70)$$

Wie man sofort erkennt, wird die Forderung $\delta E_{\text{pot}}=0$ insbesondere dann erfüllt werden, wenn folgende Teilbedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\lambda_p}{\gamma_L} = 2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.71)$$

$$\gamma_L \cos \vartheta_0 + \gamma_{S_0 L} = \gamma_{S_0} \quad (4.72)$$

$$\gamma_L \cos \vartheta_h + \gamma_{S_h L} = \gamma_{S_h} \quad (4.73)$$

Gleichung (4.71) entspricht, wenn man $\lambda_p/2$ als die Druckdifferenz $p_a - p_i$ interpretiert, der bereits bekannten Kontur-DGL Gleichung (4.11), was zu erwarten war. Die Gleichungen (4.72) und (4.73) kommen dagegen als neue Bedingungen hinzu und haben eine wichtige physikalische Bedeutung, denn sie drücken das statische Gleichgewicht an der Dreiphasengrenze Festkörper, Flüssigkeit, Luft aus, was auch als Young-Duprésche Gleichung bekannt ist. Die Young-Duprésche Gleichung läßt sich auf anderem Wege sofort herleiten: Nach Abb. 4.6 greifen an einem differentiellen Linienstück ds der Berandungskurve eines sitzenden Tropfens die eingezeichneten Kräfte an.

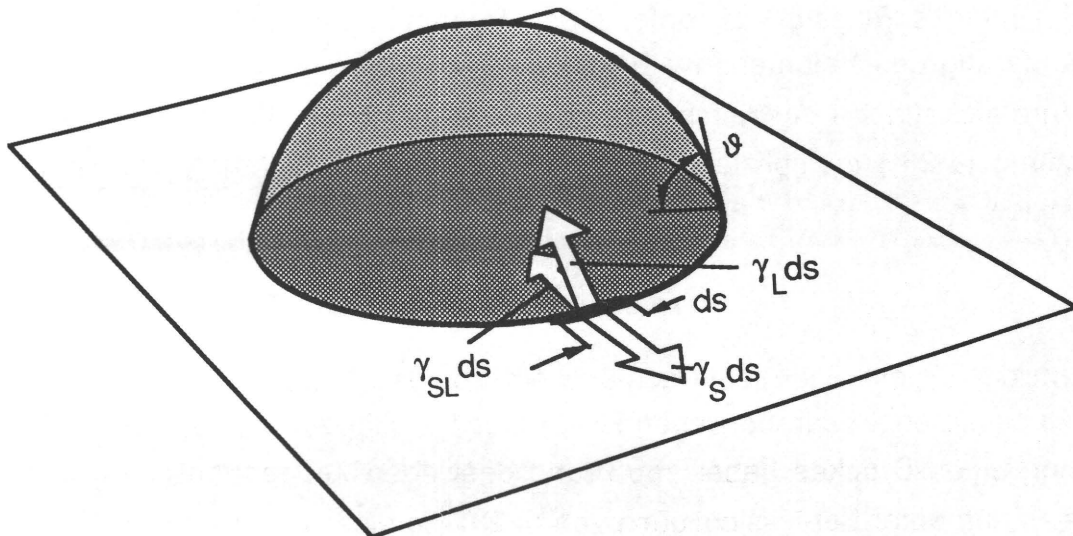


Abb. 4.6 Kräfte am Rand eines sitzenden Tropfens

Ist ϑ der Randwinkel des Tropfens, lautet das Kräftegleichgewicht in radialer Richtung:

$$\gamma_S ds - \gamma_L \cos \vartheta ds - \gamma_{SL} ds = 0 \quad (4.74)$$

Nach kürzen mit ds erhält man die Young-Duprésche Gleichung

$$\gamma_S = \gamma_L \cos \vartheta + \gamma_{SL} \quad (4.75)$$

4.4 Minimalflächenproblem

Aus den vorangegangenen energetischen Überlegungen kann man, davon ausgehend, daß die Young-Dupréschen Bedingungen am Rand (4.72) und (4.73) erfüllt werden, und der formalen Ähnlichkeit der Bestimmung von δA_L mit einer Extremwertsuche, schließen, daß dann ein Gleichgewichtszustand herrscht, wenn die freie Oberfläche des Flüssigkeitsvolumens, das sich zwischen zwei ebenen, parallelen Platten befindet, minimal wird.

In der Regel sind Minimalforderungen mathematisch einfacher zu handhaben als die vorangestellten Herleitungen. Tatsächlich gelingt auf diese Weise eine Lösung des Problems. Die Minimalforderung für die Oberfläche A eines rotationssymmetrischen Körpers lautet:

$$A = 2 \pi \int_0^h R \sqrt{R'^2 + 1} dz = \text{Min} \quad (4.76)$$

Die weitere Behandlung wird durch Einführen von dimensionslosen Größen erleichtert. Mit

$$\xi = \frac{R}{h} \quad (4.77)$$

und

$$\zeta = \frac{z}{h} \quad (4.78)$$

sowie

$$dz = h d\zeta \quad (4.79)$$

folgt aus (4.76):

$$\frac{A}{2\pi h^2} = \int_0^1 \xi \sqrt{\xi'^2 + 1} d\zeta = \text{Min} \quad (4.80)$$

Dabei ist

$$\xi' = \frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{dR}{h} \frac{h}{dz} = \frac{dR}{dz} = R' \quad (4.81)$$

Das Variationsproblem

$$\int_0^1 f(\xi, \xi') d\zeta = \int_0^1 \xi \sqrt{\xi'^2 + 1} d\zeta = \text{Min} \quad (4.82)$$

wird, da es die Variable ζ nicht explizit enthält, auf einfache Weise mit Hilfe eines sog. Zwischenintegrals /26/ gelöst.

$$f - \frac{\partial f}{\partial \xi'} \xi' = a = \text{const} \quad (4.83)$$

Es ist:

$$f(\xi, \xi') = \xi \sqrt{\xi'^2 + 1} \quad (4.84)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \xi'} = f_{\xi'} = \frac{\xi \xi'}{\sqrt{\xi'^2 + 1}} \quad (4.85)$$

Setzt man dies in Gleichung (4.83) ein, erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in ξ :

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \xi' = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\xi^2 - a^2} \quad (4.86)$$

Diese DGL läßt sich durch "Trennen der Veränderlichen" lösen. Man erhält:

$$\xi = a \cosh \left[\pm \left(\frac{\zeta}{a} + b \right) \right] \quad (4.87)$$

mit der Integrationskonstanten b . Wegen

$$\cosh(-x) = \cosh(+x) \quad (4.88)$$

darf man schließlich schreiben:

$$\xi = a \cosh \left(\frac{\zeta}{a} + b \right) \quad (4.89)$$

Diese Kontur nimmt ein aus einer Seifenblasenlamelle bestehender Körper an, wobei wegen der Kompressibilität der sich im Inneren der Blase befindlichen Luft das Blasenvolumen im Gegensatz zu den hier "gefüllten" Körpern veränderlich ist.

Da es sich beim vorliegenden Problem aber nicht um eine Seifenlamelle, sondern um einen inkompressiblen Flüssigkeitstropfen handelt, reicht die Forderung (4.76) allein nicht aus, denn der in der Variationsrechnung anzusetzende Übergang von einer Ausgangslage zu einer Vergleichslage würde die wichtige Forderung nach dem konstant bleibenden Tropfenvolumen verletzen. Daher muß, wie oben, ein konstantes Volumen als Nebenbedingung gefordert werden:

$$V = \pi \int_0^h R^2 dz = \text{const} \quad (4.90)$$

Oder in dimensionsloser Form:

$$\frac{V}{\pi h^3} = \int_0^1 \xi^2 d\zeta = \text{const.} \quad (4.91)$$

Diese Problemstellung einer Minimalforderung mit einer integralen Nebenbedingung nennt man isoperimetrisches Variationsproblem /26/. Man kann dieses Problem behandeln, indem man mit Hilfe einer beliebigen Konstanten λ , dem sog. Lagrangeschen Parameter, fordert:

$$\pi \int_0^h \left(2 R \sqrt{R'^2 + 1} + \lambda R^2 \right) dz = \text{Min} \quad (4.92)$$

Das isoperimetrische Variationsproblem schreibt sich dimensionslos:

$$\int_0^1 f(\xi, \xi', \zeta) d\zeta = \int_0^1 \left(\xi \sqrt{\xi'^2 + 1} + \lambda \xi^2 \right) d\zeta = \text{Min} \quad (4.93)$$

Da in der Funktion $f(\xi, \xi')$ die Variable ζ nicht explizit vorkommt, erfolgt die Lösung, wie oben, über ein Zwischenintegral

$$f - \frac{\partial f}{\partial \xi'} \xi' = c = \text{const} \quad (4.94)$$

Wendet man die Vorschrift (4.94) auf (4.93) an, findet man

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi'^2 + 1}} = c - \lambda \xi^2 \quad (4.95)$$

Es läßt sich nun einfach zeigen, daß eine Identität mit der DGL (4.10) besteht. Differenziert man nämlich (4.95) implizit nach ζ , folgt:

$$\frac{\xi' \sqrt{\xi'^2 + 1}}{\xi'^2 + 1} - \frac{\xi \xi' \xi''}{(\xi'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = -2\lambda \xi \xi' \quad (4.96)$$

und schließlich:

$$\frac{\xi''}{(\xi'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\xi \sqrt{\xi'^2 + 1}} = 2\lambda \quad (4.97)$$

Bringt man Gleichung (4.10) ebenfalls unter Verwendung von (4.77) u (4.78) auf eine dimensionslose Form,

$$-\frac{\xi''}{(1 + \xi'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\xi(1 + \xi'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(p_i - p_a)h}{\gamma_L} \quad (4.98)$$

sieht man sofort die Ähnlichkeit. Identisch werden die Gleichungen (4.97) und (4.98), wenn man setzt:

$$2\lambda = \frac{(p_a - p_i)h}{\gamma_L} \quad (4.99)$$

was sicherlich ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit zulässig ist. Die rechte Seite von Gleichung (4.99) trägt mit der charakteristischen Länge L anstelle von h als dimensionslose Kennzahl den Namen Laplace-Zahl 2 (La_2) /22/. Man kann diese Kenngröße als das Verhältnis von einer Druckkraft zu einer Oberflächenspannungskraftgröße interpretieren.

$$La_2 = \frac{(p_a - p_i)L}{\gamma_L} \quad (4.100)$$

4.5 Exakte Lösung von Gleichung (4.95)

Gleichung (4.95) ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, die durch "Trennen der Veränderlichen" gelöst werden kann. Dazu löst man (4.95) nach ξ' auf. Man erhält

$$\xi' = \frac{d\xi}{d\zeta} = \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{(c - \lambda \xi^2)^2} - 1} \quad (4.101)$$

Das "Trennen der Veränderlichen" liefert für die Integration

$$\zeta = \pm \int \frac{c - \lambda \xi^2}{\sqrt{-\lambda^2 \xi^4 + (1+2c\lambda)\xi^2 - c^2}} d\xi + K \quad (4.102)$$

mit der Integrationskonstanten K. Die Existenz reeller Lösungen für die Funktion $\zeta(\xi)$ ist nur gewährleistet, wenn der Ausdruck unter der Wurzel in Gleichung (4.102) positiv ist. Zur Untersuchung dieses Sachverhalts muß man die Nullstellen dieses Ausdrucks kennen. Die zu lösende Gleichung beinhaltet ein biquadratisches Polynom P aus dem Argument der Wurzel und hat die Form (A, B, D = Konstanten):

$$P = A\xi^4 + B\xi^2 + D = 0 \quad (4.103)$$

P hat insgesamt vier Nullstellen. Sie lauten:

$$\xi_{1/3} = \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2} + c\lambda + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c\lambda}} = \pm \frac{1}{2\lambda} (1 + \sqrt{1+4c\lambda}) \quad (4.104)$$

$$\xi_{2/4} = \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2} + c\lambda - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c\lambda}} = \pm \frac{1}{2\lambda} (1 - \sqrt{1+4c\lambda}) \quad (4.105)$$

Die Vereinfachung der Doppelwurzel wird mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung ausgeführt.

Da an der Stelle $\xi=0$ das Polynom P auf alle Fälle negativ wird ($-c^2$ ist stets negativ), ist der qualitative Verlauf des Polynoms bekannt, wenn alle vier Nullstellen reell sind. Die Lage der Nullstellen auf der ξ -Achse und den Verlauf von P verdeutlicht Abb. 4.7.

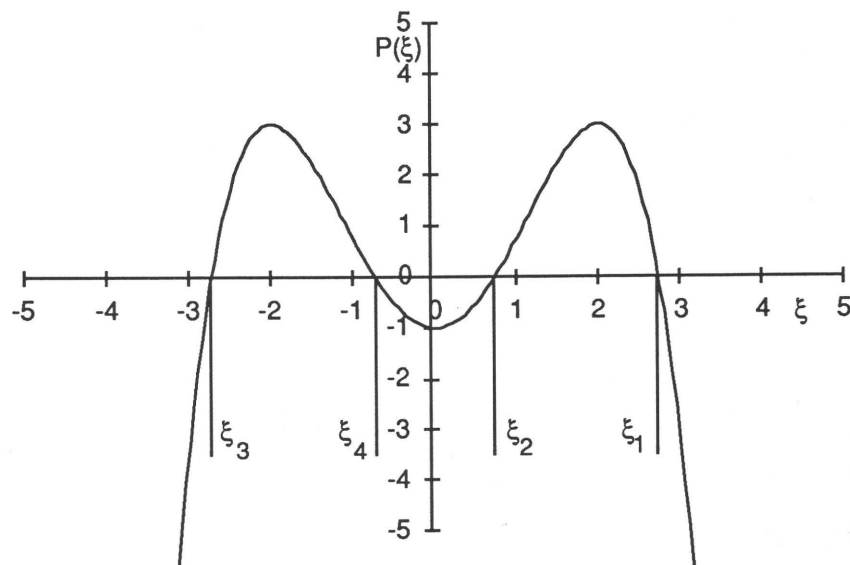


Abb. 4.7 Lage der Nullstellen des Polynoms $P(\xi)$

Zu einer physikalischen Deutung der Lage der Nullstellen gelangt man, wenn man in Gleichung (4.95) ξ' als den Tangens eines Steigungswinkels α betrachtet. Es ist:

$$\sqrt{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (4.106)$$

Da die Cosinusfunktion nur Werte zwischen + 1 und - 1 annehmen kann, folgt:

$$-1 \leq \frac{c - \lambda \xi^2}{\xi} \leq 1 \quad (4.107)$$

Setzt man in (4.107) den mittleren Term einmal gleich der unteren und einmal gleich der oberen Grenze, erhält man zwei quadratische Gleichungen in ξ , deren Lösung insgesamt vier Nullstellen liefert. Sie lauten:

$$\xi_{1/3} = \pm \frac{1}{2\lambda} (1 + \sqrt{1 + 4c\lambda}) \quad (4.108)$$

$$\xi_{2/4} = \pm \frac{1}{2\lambda} (1 - \sqrt{1 + 4c\lambda}) \quad (4.109)$$

Gleichungen (4.108) bzw. (4.109) sind identisch mit (4.104) bzw. (4.105).

Wenn die Nullstellen alle reell sind, d.h. wenn

$$1 + 4c\lambda \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad c\lambda \geq -\frac{1}{4} \quad (4.110)$$

und $\lambda \neq 0$ ist, wird die gesuchte Funktion $\xi(\zeta)$ dann wegen der harmonischen Eigenschaft von $\cos \alpha$ aus der Betrachtung (4.106) periodisch zwischen der betragsmäßig größeren und der kleineren Nullstelle hin- und herschwanken.

Wegen

$$\xi_3 = -\xi_1 \quad \text{und} \quad \xi_4 = -\xi_2 \quad (4.111)$$

läßt sich schreiben:

$$\left| \frac{1}{2\lambda} (1 - \sqrt{1 + 4c\lambda}) \right| \leq \xi \leq \left| \frac{1}{2\lambda} (1 + \sqrt{1 + 4c\lambda}) \right| \quad (4.112)$$

Die weitere Rechnung vereinfacht sich beträchtlich, wenn man mit bekannten Nullstellen ξ_1 und ξ_2 folgende Produktzerlegung durchführt:

$$P = -\lambda^2 \xi^4 + (1 - 2c\lambda) \xi^2 - c^2 = -\lambda^2 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4) \quad (4.113)$$

Mit (4.111) kann man dann schreiben:

$$P = -\lambda(\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - \xi_2^2) = -\lambda^2(\xi_1^2 - \xi^2)(\xi_2^2 - \xi^2) = \lambda^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^2\right] \left[\left(\frac{\xi}{\xi_2}\right)^2 - 1\right] \quad (4.114)$$

in (4.102) eingesetzt:

$$\zeta = \pm \frac{1}{\lambda \xi_1 \xi_2} \int \frac{c - \lambda \xi^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\xi}{\xi_2}\right)^2 - 1}} d\xi \quad (4.115)$$

Zur Lösung des Integrals (4.115) ist es sinnvoll, zu substituieren. Man setzt

$$s = \frac{\xi}{\xi_1} \quad (4.116)$$

$$k = \frac{\xi_1}{\xi_2} \quad (4.117)$$

So ist

$$ks = \frac{\xi}{\xi_2} \quad (4.118)$$

und aus (4.115) wird:

$$\zeta = \pm \frac{1}{\lambda \xi_2} \int \frac{c - \lambda \xi_1^2 s^2}{\sqrt{1 - s^2} \sqrt{k^2 s^2 - 1}} ds \quad (4.119)$$

Eine weitere Substitution

$$s = \sin \beta \quad (4.120)$$

und Aufspalten in zwei Teilintegrale I_1 und I_2 führt auf

$$I_1 = \frac{c}{\lambda \xi_2} \int \frac{1}{\sqrt{k^2 \sin^2 \beta - 1}} d\beta \quad (4.121)$$

bzw.

$$I_2 = -\frac{\xi_1^2}{\xi_2} \int \frac{\sin^2 \beta}{\sqrt{k^2 \sin^2 \beta - 1}} d\beta \quad (4.122)$$

Beide Integrale sind nicht geschlossen integrierbar, sondern führen auf die sog. elliptischen Integrale in der Legendreschen Normalform /26/. Nach weite-

ren Zwischenrechnungen kann man die Integrale auf eine Form bringen, für welche man in Tabellenbüchern /27/ Lösungen findet. Sie lauten:

$$I_1 = -\frac{c}{\lambda \xi_2} \frac{1}{k} F\left(\arcsin \frac{k \cos \beta}{\sqrt{k^2 - 1}}, \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}\right) \quad (4.123)$$

$$I_2 = \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \frac{1}{k} E\left(\arcsin \frac{k \cos \beta}{\sqrt{k^2 - 1}}, \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}\right) \quad (4.124)$$

Dabei werden mit E und F die unvollständigen elliptischen Integrale der ersten bzw. zweiten Art bezeichnet. Nach dem Zusammenfassen der Teilintegrale und Rücksubstituieren lautet die allgemeine Lösung des Problems:

$$\zeta = \pm \left[\xi_1 E\left(\arcsin \sqrt{\frac{\xi_1^2 - \xi^2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}}, \sqrt{1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}}\right) - \frac{c}{\lambda \xi_1} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\xi_1^2 - \xi^2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}}, \sqrt{1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}}\right) + K \right] \quad (4.125)$$

Die eigentlich gesuchte Funktion $\xi(\zeta)$ kann jedoch nicht angegeben werden, da (4.125) nicht generell nach ξ aufgelöst werden kann.

4.6 Stabilität von Flüssigkeitsbrücken

Während z.B. für reelle Funktionen einer Veränderlichen die Bedingung $f''(x) > 0$ (oder $f''(x) < 0$) ein hinreichendes Kriterium liefert, ob der Funktion $f(x)$ ein Minimum (oder Maximum) erteilt wird, reichen die analogen Bedingungen für die zweite Variation der potentiellen Energie, hier $\delta^2 E$ (d.h. $\delta^2 E > 0 \Rightarrow$ stabil bzw. $\delta^2 E < 0 \Rightarrow$ instabil), nicht aus, um bei Variationsproblemen hinreichende Optimalitätsbedingungen zu erhalten. Hierfür sind zusätzliche Überlegungen notwendig, die auf der Betrachtung von Extremalenfeldern beruhen. In grundlegenden Arbeiten zu statischen Flüssigkeitsbrücken findet man zwei Theorien zu den hinreichenden Optimalitätsbedingungen. Martinez und Perales /10/ (rein numerisch) oder Fortes /11/ verwenden das sog. "Zero-Jacobian"-Kriterium, während Howe /7/ und Gillette und Dyson /8/ die Methode der konjugierten Punkte anwenden. Beide Methoden sind von der Natur recht ähnlich aber sehr aufwendig und nur numerisch handhabbar. Sie verlangen die Formulierung des Problems (4.13) in Parameterdarstellung, d.h. $r=r(t)$ und $z=z(t)$,

welches dann mit (4.99) in entdimensionierter Form lautet (der Punkt bedeutet die Ableitung nach t):

$$\ddot{\xi} = 2\lambda\dot{\xi} + \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} \quad (4.126)$$

Damit eine Kurve im Intervall $t_1 < t < t_2$ die Bedingung für konjugierte Punkte erfüllt, darf die Determinante D

$$D(t_1, t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_1(t) & \psi_1(t_1, t) \\ \varphi_2(t_1) & \varphi_2(t) & \psi_2(t_1, t) \\ \varphi_3(t_1) & \varphi_3(t) & \psi_3(t_1, t) \end{vmatrix} \quad (4.127)$$

nicht verschwinden. Mit φ_i und ψ_i als komplizierten Funktionen der gleichen Argumente, wie sie in den elliptischen Integralen in Gleichung (4.125) vorkommen. Wird $D(t_1, t_2)$ für t_2 zum erstenmal wieder Null, heißen t_1 und t_2 konjugierte Punkte. Eine Flüssigkeitsbrücke ist dann stabil, wenn sie von t_1 nur bis zu einem Punkt $t^* < t_2$ reicht. Stabilität wird nie über zwei Kurvenmaxima oder -minima hinweg erreicht.

De Bissshop und Rigole /14/ leiten Stabilitätskriterien für Flüssigkeitsbrücken zwischen kugelförmigen Körpern mit Randwinkeln kleiner 90° aus energetischen Betrachtungen her, indem die für gegebene Randbedingungen (Randradien oder Randwinkel) numerisch berechneten Kurvenscharen herangezogen werden. Alle stabilen Formen müssen dann zwischen dem berechneten maximalen und minimalen Volumen liegen, sonst muß die Brücke reißen.

4.7 Lösungsklassen und Randbedingungen

In Gleichung (4.125) kommen noch drei unbekannte Konstanten c , λ und K vor, die insbesondere auch in den Nullstellen ξ_1 und ξ_2 enthalten sind.

Die folgenden Betrachtungen gelten für einen positiv gewählten Parameter c . Für negative c werden die Lösungen lediglich spiegelbildlich, weshalb man auf eine gesonderte Untersuchung verzichten kann. Die nachfolgenden Bilder der Lösungskurven wurden durch numerisches Lösen der DGL (4.10) erstellt. Wolf /21/ und Howe /7/ greifen in ihren Arbeiten die bereits auf Plateau zurückreichende Klassifizierung der Lösungsarten wieder auf. Plateau, der sich bereits 1893 mit dem Problem stabiler Flüssigkeitsbrücken und Seifenhautlammellen experimentell und theoretisch beschäftigte, unterteilte je nach den

speziellen Eigenschaften der entstehenden Kurven die Lösungen von (4.95) in drei Kategorien:

1.) Undoloiden

Undoloiden besitzen Wendepunkte $\xi'' = 0$, bei denen einer der beiden Hauptkrümmungsradien sein Vorzeichen wechselt. Betrachtet man Gleichung (4.97), kann ein Wendepunkt nur existieren, wenn λ negativ ist, somit ist aber der Außendruck p_a stets kleiner als der Innendruck p_i . Die Abbildungen 4.8 a), b), c) und d) zeigen Beispiele für Undoloiden unter Variation der Parameter c und λ bei verschiedenen ξ_0 , wobei zur Verdeutlichung der Funktion als Tropfenberandungskurve alle Kurven an der ζ -Achse gespiegelt noch einmal gezeichnet sind.

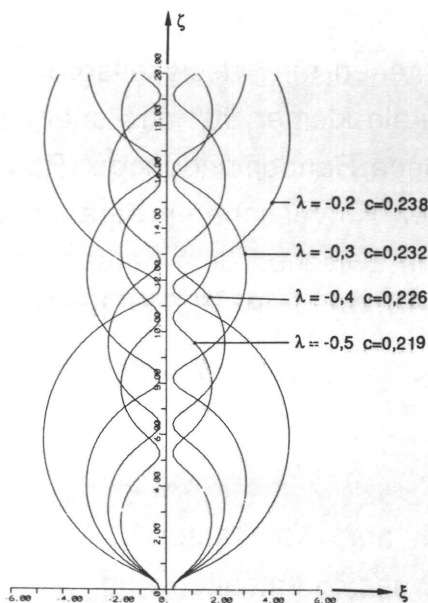


Abb. 4.8 a) Beispiel für Undoloiden

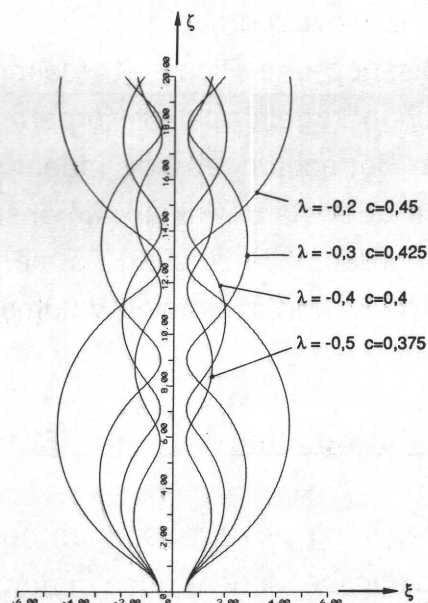


Abb. 4.8 b) Beispiel für Undoloiden

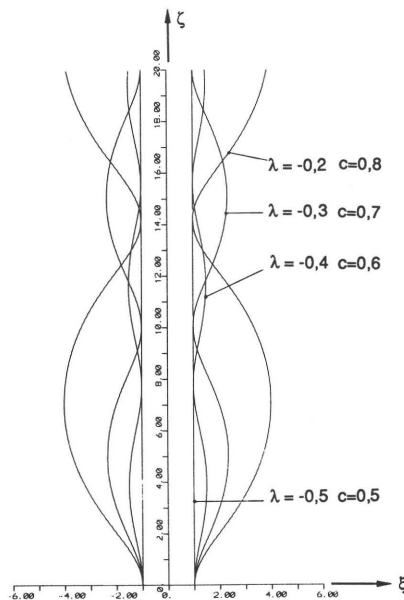


Abb. 4.8 c) Beispiel für Undoloiden

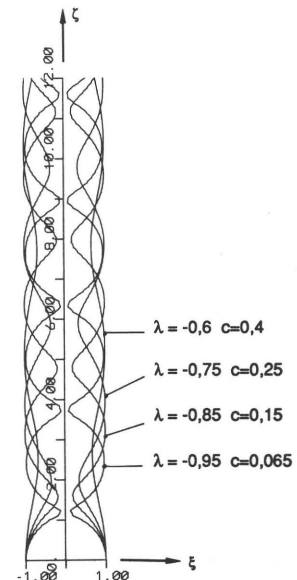


Abb. 4.8 d) Beispiel für Undoloiden

2.) Katenoiden

Bei Katenoiden wird der Parameter $\lambda=0$, was zu den bereits beschriebenen einfachen cosh-Lösungen der Form (4.89) führt, welche nur einen Extremwert ξ_{\min} besitzen.

An der engsten Stelle ξ_{\min} des Katenoids wird die Steigung $\xi'=0$. Durch Einsetzen dieser Bedingung in Gleichung (4.95) erhält die Konstante c eine direkte physikalische Deutung, da dann $c=\xi_{\min}$ ist.

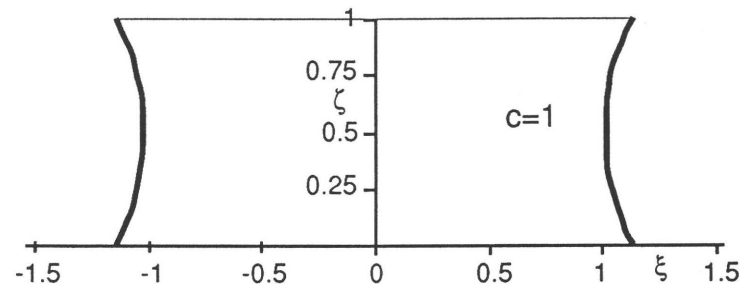


Abb. 4.9 Beispiel für Katenoide

3.) Nodoiden

Nodoiden sind dadurch gekennzeichnet, daß sie Stellen mit $\xi' = \infty$ besitzen, d.h. es existieren Kurvenpunkte mit rein radial verlaufenden Tangenten. In Abb. 4.10 a) ist ein Beispiel einer Nodoide innerhalb zweier solcher Punkte mit radialen Tangenten dargestellt.

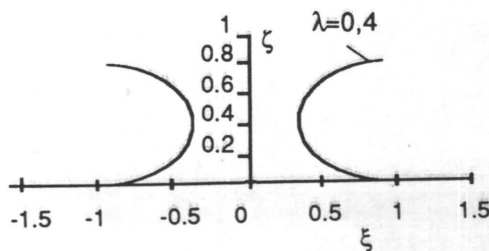


Abb. 4.10 a) Nodoide zwischen zwei Stellen mit $\xi' = \infty$

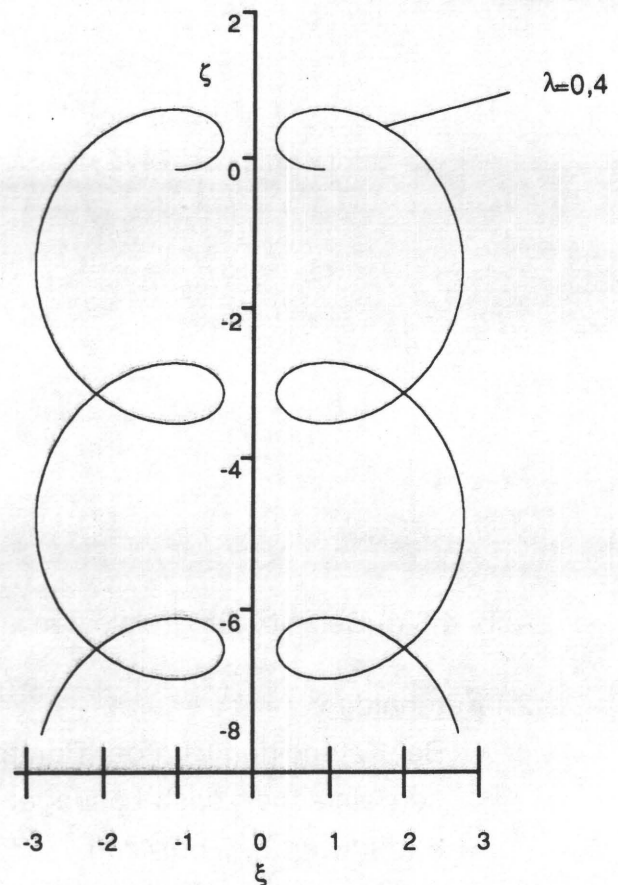


Abb. 4.10 b) Nodoide aus a) weiterer Verlauf

Da an diesen Stellen, nicht wie bei den Undoloiden, die Krümmung der Kurve wechselt, führt dies bei Weiterführung der Nodoide zwangsläufig zur Überlappung der Kurven in periodischen Schleifen mit sich selbst. Die ausgezeichneten Stellen mit den radialen Tangenten findet man, wenn man in Gleichung (4.95) ξ' gegen ∞ gehen läßt. Es wird

$$c - \lambda \xi_{\infty}^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \xi_{\infty} = \sqrt{\frac{c}{\lambda}} \quad (4.128)$$

Soll der Funktionswert ξ_{∞} an dieser Stelle reell sein, muß der Ausdruck unter der Wurzel positiv sein, was (wie oben vorausgesetzt, bei positivem c) nur für positive λ der Fall sein kann. Damit ist nach der Definition für λ nach Gleichung (4.99) bei Nodoiden der "Außen"-Druck p_a stets höher als der "Innen"-Druck p_i . Nun wird aber bei den Nodoiden die Unterscheidung in "außen" und "innen" schwierig, da ja bei den Stellen ξ_{∞} ein zur Kurve gedachter mitlaufender Normalenvektor, der auf den Mittelpunkt des Krümmungskreises mit dem Radius R_1 zeigt, seine Orien-

tierung von der der ζ -Achse abgewandten Seite zu der der ζ -Achse hingewandten Seite (oder umgekehrt) ändert. Dieser Normalenvektor bleibt bei Nodoiden stets auf der gleichen Seite der Kurve. Damit liegt der nach Abb. 4.1 bzw. 4.2 mit p_a bezeichnete Druck immer auf der Seite der Kurve, bei der die Normale auf den Mittelpunkt des Krümmungsradius R_1 zeigt.

Abb. 4.10 c) und d) zeigen weitere Beispiele für Nodoiden für unterschiedliche Parameter λ unter Variation von ξ_0 .

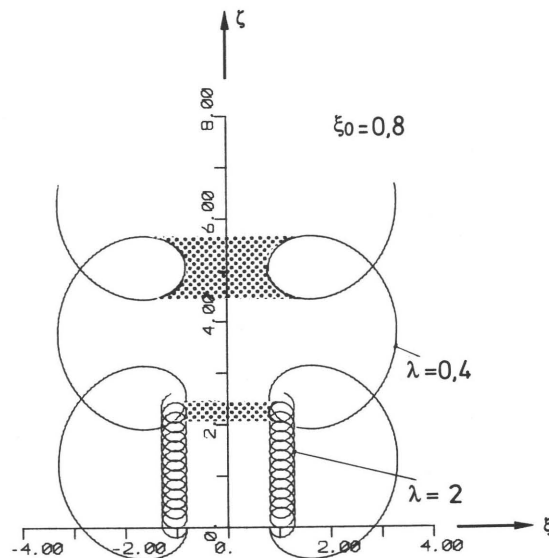


Abb. 4.10 c) Beispiel für Nodoiden

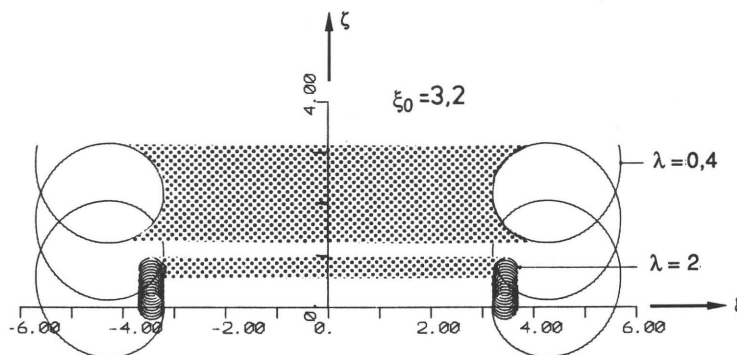


Abb. 4.10 d) Beispiel für Nodoiden

Wie man sieht, können sich je nach den Parameterwerten die Schleifen in sich selbst sogar mehrfach überlappen.

Mögliche Flüssigkeitsbrückenformen, bei denen ausschließlich Randwinkel unter 90° auftreten, und der "Innen"-Druck kleiner als der "Außen"-Druck ist, sind in den Abb. 4.10 c) und d) durch graues Unterlegen angedeutet.

Als Sonderfall einer Lösung kann noch eine vierte Kurvenform gelten. Für $c=0$ wird nämlich aus Gleichung (4.95):

$$\frac{1}{\sqrt{\xi'^2 + 1}} = -\lambda \xi \quad (4.129)$$

Diese DGL läßt sich durch "Trennen der Veränderlichen" leicht lösen, und mit der Integrationskonstanten K findet man die Konturgleichung:

$$(\zeta - K)^2 + \xi^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.130)$$

Das ist eine Kreisgleichung in der ξ - ζ -Ebene, also handelt es sich im vorliegenden Fall um eine Kugelkalotte (Kugelabschnitt). Diese Kontur nimmt bekannterweise ein sitzender Flüssigkeitstropfen (Abb. 4.6) unter Vernachlässigung der Gravitationskräfte an. Bei der Kugel sind die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 gleich groß und weisen in die gleiche Richtung. Somit muß nach Gleichung (4.11) p_i stets größer als p_a sein, was bekanntermaßen mit der Tatsache übereinstimmt, daß der Innendruck im Flüssigkeitskugelabschnitt immer höher ist als der Außendruck.

Die Bedeutung der Konstanten c und λ für die Form der Kurven kann zusammenfassend noch einmal sehr deutlich gezeigt werden, wenn man die Beträge der Nullstellen ξ_1 (entspricht dem Betrag des Maximalradius' der periodischen Nodoiden bzw. Undoloiden) und ξ_2 (entspricht dem Minimalradius) nach Gleichungen (4.108) bzw. (4.109) über λ aufträgt (Abb. 4.11). Bei $\lambda=0$ hat der Kurvenverlauf für die betragsmäßig größere Nullstelle eine Polstelle. Daher haben Katenoiden keinen Maximalradius, sondern nur einen Minimalradius, der aufgrund des reellen Grenzwerts für ξ_2 für $c\lambda$ gegen Null gleich der Konstanten c ist. Bei $c\lambda=-0,25$ vereinigen sich die Kurven für die größere und die kleinere Nullstelle in einem Punkt. In diesem Spezialfall ist die Minimalfläche ein Zylinder (s. innere Kurve in Abb. 4.8 c).

Die Konstanten c und λ charakterisieren also im wesentlichen den Verlauf der periodischen Lösungsfunktion, während K den zutreffenden Abschnitt innerhalb einer Periode bestimmt, denn, wie man anhand der Abb. 4.8 bis 4.10 leicht sieht, können die periodischen Undoloiden und Nodoiden der Oberfläche des Tropfens nur innerhalb einer Periode ein Minimum erteilen.

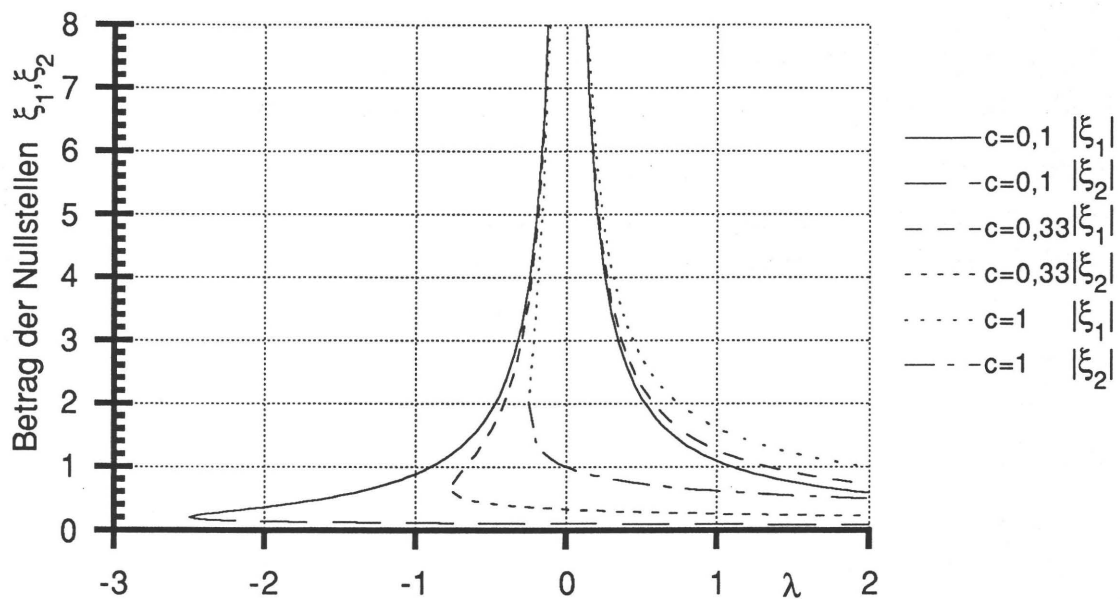


Abb. 4.11 Beträge der Nullstellen ξ_1 und ξ_2 in Abhängigkeit der Konstanten c und λ

Wie die Tropfenkontur in den einzelnen Phasen der Flüssigkeitsspaltung aussieht, hängt somit ausschließlich von den Randbedingungen ab, die man braucht, um die drei unbekannten Konstanten c , λ und K bestimmen zu können. Man hat im vorliegenden Problem die Wahl unter 6 vorgebbaren geometrischen Größen. Nach Abb. 3.2 sind dies:

- 1) Randwinkel ϑ_0 an der unteren Platte ($z=0$ bzw. $\zeta=0$)
- 2) Grundradius R_0 bzw. ξ_0 an der unteren Platte ($z=0$ bzw. $\zeta=0$)
- 3) Randwinkel ϑ_h an der oberen Platte ($z=h$ bzw. $\zeta=1$)
- 4) Grundradius R_h bzw. ξ_h an der oberen Platte ($z=h$ bzw. $\zeta=1$)
- 5) Tropfenvolumen V (= const.)
- 6) Plattenabstand h

Hierzu muß angemerkt werden, daß für die Vorgabe von Randwinkeln die Voraussetzung gelten muß, daß die beteiligten Festkörperoberflächen eben und homogen sind, damit sich die Dreiphasengrenzlinie ggf. ungehindert verschieben kann. In der Drucktechnik ist diese Voraussetzung in erster Linie auf glatten, nichtsaugenden Bedruckstoffen anzutreffen. Feste Grundradien sind auf den Druckformoberflächen am wahrscheinlichsten, wo z.B. die pyramiden-

stumpfähnlichen Rasterpunkte der Hochdruckform (s. Abb. 1.5) Kanten haben, an denen sich kein definierter Randwinkel einstellen kann /21/. Auch die Grenzen zwischen druckenden und nichtdruckenden Stellen auf der Flachdruckplatte stellen solche Kanten im grenzflächenphysikalischen Sinne dar.

Welche denkbaren Kombinationen von Randbedingungen daraus möglich sind, soll folgende Überlegung verdeutlichen. Könnte man tatsächlich die Umkehrfunktion $\xi(\zeta)$ angeben, hätte man eine Gleichung der Form

$$\xi = f(\zeta, c, \lambda, K) \quad (4.131)$$

Sie enthält außer der unabhängigen Variablen ζ drei freie Konstanten, zu deren Festlegung demzufolge insgesamt drei Randbedingungen gebraucht werden. Mit der ersten Ableitung von (4.129)

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \xi' = f'(\zeta, c, \lambda) \quad (4.132)$$

ließen sich mit Hilfe der oben genannten sechs geometrischen Größen fünf verschiedene Randbedingungen formulieren:

bei $z=0$ bzw. $\zeta=0$:

$$\xi_0 = f(\zeta=0, c, \lambda, K) \quad (4.133)$$

$$\vartheta_0 = f(\zeta=0, c, \lambda) \quad (4.134)$$

bei $z=h$ bzw. $\zeta=1$:

$$\xi_h = f(\zeta=1, c, \lambda, K) \quad (4.135)$$

$$\vartheta_h = f(\zeta=1, c, \lambda) \quad (4.136)$$

sowie für das Tropfenvolumen aus Gleichung (4.91)

$$\frac{V}{\pi h^3} = \int_0^1 [f(\zeta, c, \lambda, K)]^2 d\zeta \quad (4.137)$$

Um ein überbestimmtes System zu vermeiden, dürfen beispielsweise neben der für die Farbspaltungsvorgänge der zweiten Klasse wichtigen Bedingung (4.137) somit nur noch zwei der vier "echten" Randbedingungsgleichungen (4.133-4.136) vorgegeben werden. Die zwei restlichen Größen sind freizulassen und stellen sich "von selbst" ein. Würde man alle vier Randgrößen ξ_0 , ξ_h , ϑ_0 , ϑ_h unabhängig voneinander vorgeben wollen, wäre das Problem nicht mehr mit einfachen Mitteln der Variationsrechnung zu lösen, da man diese als weitere Nebenbedingungen berücksichtigen müßte.

Wie man auch die Randbedingungen wählt, führt beispielsweise das Einsetzen der Gleichungen (4.133) oder (4.135) in die Lösung (4.125) auf die Kon-

stante K , die den Koordinatenursprung festlegt, die Konstanten c und λ lassen sich jedoch nicht berechnen, da man (4.125) nicht nach c oder λ auflösen kann.

Ohne Verwendung der Gleichung (4.125) lassen sich lediglich unter Zuhilfenahme von Gleichung (4.95) folgende Aussagen aus den Randradius- und Randwinkelwerten ableiten:

$$R_0 \sin \vartheta_0 = c h - \frac{\lambda}{h} R_0^2 \quad (4.138)$$

$$R_h \sin \vartheta_h = c h - \frac{\lambda}{h} R_h^2 \quad (4.139)$$

Kombiniert man die dimensionsbehafteten Gleichungen (4.138) und (4.139), kann man Ausdrücke für c und λ gewinnen:

$$\lambda = h \frac{R_0 \sin \vartheta_0 - R_h \sin \vartheta_h}{R_h^2 - R_0^2} \quad (4.140)$$

$$c = \frac{\frac{\sin \vartheta_0}{R_0} - \frac{\sin \vartheta_h}{R_h}}{h \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_h^2} \right)} \quad (4.141)$$

Da man aber aufgrund obiger Überlegungen nicht alle vier Größen R_0 , R_h , ϑ_0 und ϑ_h vorgeben darf, können Gleichungen (4.140) und (4.141) lediglich für die Auswertung fotografiert Tropfen (z.B. Abb. 1.8) verwendet werden. Das Vorzeichen von λ bestimmt ja die Lösungskategorie (Nodoide oder Undoloide) und somit auch die interessierende Wirkrichtung der Druckdifferenz $p_a - p_i$. Die Anwendung der beiden Bestimmungsgleichungen beschränkt sich aber auf Tropfengeometrien mit deutlich unterschiedlichen Randradien. Nähern sich die Abmessungen der beiden Grundradien nämlich einander, sieht man, daß jeweils die Nenner der Gleichungen (4.140) und (4.141) gegen Null streben. Die Ergebnisse für c und λ hängen dann sehr stark von der Differenz der beiden Randwinkel ab. Die Differenz läßt sich aber ihrerseits als "kleine" Größe wegen der nicht unerheblichen Fehler beim Ablesen der Randwinkel nicht genau genug bestimmen. In der Nähe symmetrischer Verhältnisse ist es somit nicht möglich, aus den Gleichungen (4.140) und (4.141) c und λ zu bestimmen.

Möchte man nur wissen, ob es sich bei der sich einstellenden Tropfenkontur um eine Nodoide oder Undoloide handelt, kann man dies herausfinden, in-

dem man die Lage der zugehörigen Katenoide bestimmt, da diese den Grenzfall zwischen Nodoiden und Undoloiden darstellt. Löst man nämlich Gleichung (4.95) nach ξ' auf (4.101), sieht man, daß die Steigung ξ' bei gleichem c und ξ in Abhängigkeit von λ für Nodoiden ($\lambda > 0$) stets größer und die der Undoloiden ($\lambda < 0$) stets kleiner als die der Katenoiden ist. In Abb. 4.12 sind zum Verdeutlichen des Sachverhalts die drei Kurvenformen qualitativ so gezeichnet, daß sie bei $\zeta = \zeta_m$ und $\xi = \xi_{\min}$ durch den gleichen Punkt gehen.

Zur Unterscheidung der Kurvenformen kann somit folgendes Kriterium herangezogen werden. Ist in einem Abstand y von der Stelle ζ_m des Minimalradius' ξ_{\min} der Radius $\xi_y = \xi(\zeta = \zeta_m - y)$ größer als der entsprechende Radius der Katenoide ξ_{yKat} mit

$$\xi_{yKat} = \xi_{\min} \cosh\left(\frac{y}{\xi_{\min}}\right) \quad (4.142)$$

handelt es sich um eine Nodoiden. Ist ξ_y kleiner als ξ_{yKat} liegt eine Undoloiden vor.

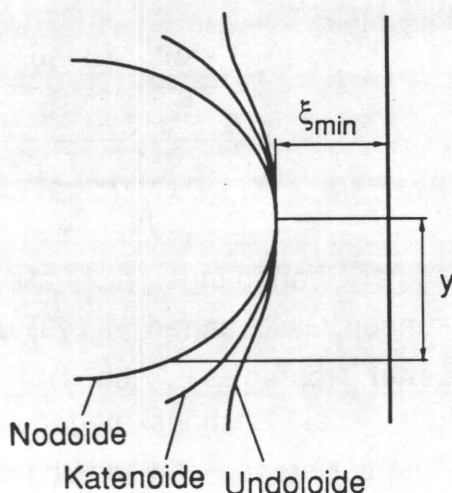


Abb. 4.12 Vergleich: Undoloide, Katenoide und Nodoiden

4.8 Spezialfall Katenoide

Für den Spezialfall der Katenoiden nach Gleichung (4.89) wird im folgenden versucht, für die verschiedenen möglichen Kombinationen von Randbedingungen eine Lösung der Konturgleichung anzugeben.

Unter der Annahme, daß die die Druckdifferenz enthaltende Größe λ klein bleibt, kann die Katenoide als eine erste Näherung für die tatsächliche Tropfenkontur aufgefaßt werden. Die beiden in Gleichung (4.89) vorkommenden

Konstanten a und b liegen dabei aber bereits durch nur zwei vorgegebene Randbedingungen fest.

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es günstiger, die willkürliche Konstante b aus (4.89) positiv anzusetzen. Die allgemeine Gleichung der Katenoide und deren erste Ableitung lauten dann:

$$\xi = a \cosh\left(\frac{\zeta}{a} - b\right) \quad (4.143)$$

$$\xi' = \sinh\left(\frac{\zeta}{a} - b\right) \quad (4.144)$$

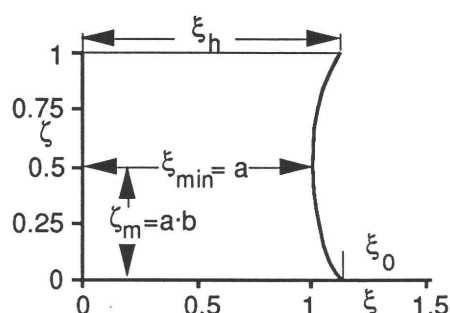


Abb. 4.13 Bezeichnungen bei Katenoiden

An der Minimalstelle ($\zeta = \zeta_m$) des Tropfens (Bezeichnungen siehe Abb. 4.13) gilt wegen der dort herrschenden Bedingung $\xi' = 0$

$$\zeta_m = ab \quad \text{und} \quad a = \xi_{\min} \quad (4.145)$$

Darauf aufbauend kann man versuchen, Kriterien für die drucktechnisch so bedeutsame Lage der Spaltungsebene anzugeben. Kennt man beispielsweise aus Experimenten die sich auf den beim Farbübertragungsprozeß beteiligten Festkörpern einstellenden Randwinkel, könnte man die übertragene Farbmenge mit der Annahme abschätzen, daß sich der Tropfen mit großer Wahrscheinlichkeit dort spalten wird, wo sich der kleinste Radius ξ_{\min} befindet. Man kann dann ein Volumenverhältnis für $0 < \zeta_m < 1$ wie folgt definieren:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \int_0^{\zeta_m} \xi^2 d\zeta}{\pi \int_{\zeta_m}^1 \xi^2 d\zeta} \quad (4.146)$$

Nach der Integration des Ausdrucks für ξ aus (4.89') ergibt sich aus (4.145)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b - \frac{1}{2} \sinh(-2b)}{\frac{1}{a} - b + \frac{1}{2} \sinh\left(\frac{2}{a} - 2b\right)} \quad (4.147)$$

Zur expliziten Bestimmung der Konstanten a und b der Katenoide sind nach den obigen Überlegungen als Randbedingungen bei bekanntem h wahlweise vorzugeben:

- zwei Randwinkel
- ein Randwinkel und ein Randradius
- zwei Randradien
- ein Randwinkel und Volumen oder
- ein Randradius und Volumen.

Haben die beiden Randwinkel unterschiedliches Vorzeichen, und sind beide $\leq 90^\circ$, liegt die Minimalstelle ζ_m zwischen $\zeta=0$ und $\zeta=1$.

$$0 \leq \zeta_m = ab \leq 1 \quad (4.148)$$

Aus dieser Bedingung lässt sich ein Kriterium ableiten, ob mit den vorgegebenen Randbedingungen eine Gleichgewichtslage gefunden werden kann.

Für die oben aufgeführten Kombinationen von Randbedingungen werden im folgenden, soweit analytisch möglich, die Bestimmungsgleichungen für a und b angegeben, die Bedingung (4.147) diskutiert und die abgeschätzte Lage der Spaltungsebene sowie das Volumenverhältnis V_1/V_2 berechnet.

Bezeichnet man dazu die Steigung der Kontur an der Stelle $\zeta=0$ mit θ_0 und bei $\zeta=1$ mit θ_h , gilt $\cot \vartheta_0 = -\theta_0$ sowie $\cot \vartheta_h = \theta_h$.

In den folgenden Abbildungen, in denen Katenoiden dargestellt werden, sind zur Verdeutlichung der Funktion als Berandungskurven von Rotationskörpern die Funktionen nochmals an der ζ -Achse gespiegelt aufgetragen. Die Skalierung der ξ - und ζ -Achsen ist in diesen Abbildungen immer identisch.

1. Fall: zwei Randwinkel

Man findet durch Einsetzen der Randbedingung $\xi'=\theta_0$ an der Stelle $\zeta=0$ in Gleichung (4.144):

$$b = -\operatorname{arsinh}(\theta_0) \quad (4.149)$$

und

$$a = \frac{1}{\operatorname{arsinh}(\theta_h) - \operatorname{arsinh}(\theta_0)} \quad (4.150)$$

Wie man leicht sieht, ist Bedingung (4.148) für eine negative Steigung θ_0 stets erfüllt. Für vorgegebene ϑ_0 - und ϑ_h -Werte sind in Abb. 4.14 die nach (4.149) und (4.150) berechneten Katenoiden aufgetragen.

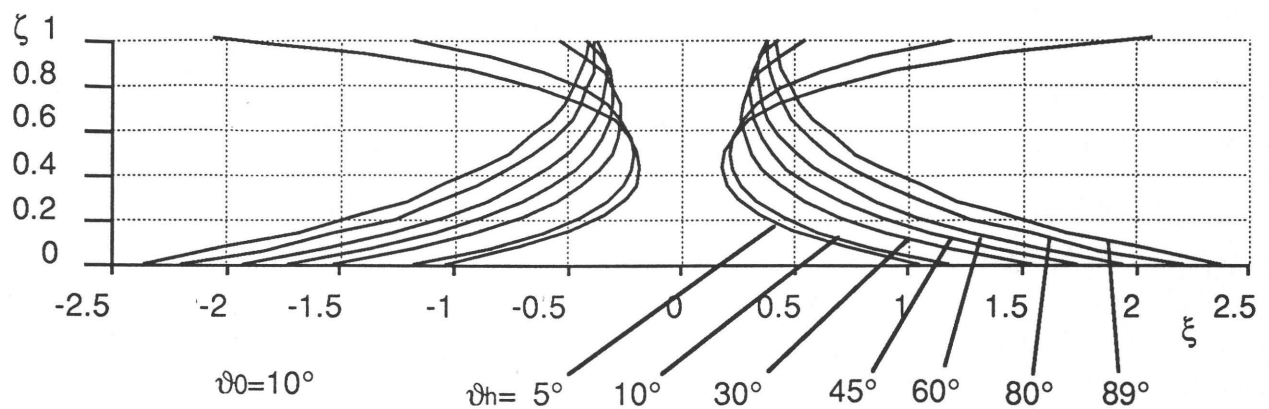


Abb. 4.14 Katenoiden für verschiedene Randwinkel ϑ_h bei $\vartheta_0=10^\circ$

Das berechnete Volumenverhältnis nach (4.147) ist in Abhängigkeit verschiedener Werte für ϑ_0 und ϑ_h in Abb. 4.15 aufgetragen.

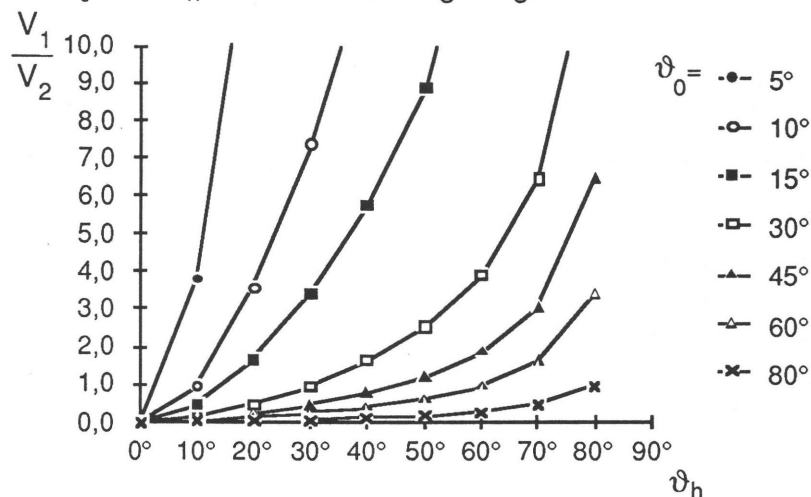


Abb. 4.15 Volumenverhältnis in Abhängigkeit verschiedener Werte für ϑ_0 und ϑ_h

Man sieht, daß bereits für kleine Differenzen zwischen ϑ_0 und ϑ_h beträchtliche Unterschiede in den abgeschätzten, nach der Spaltung verbleibenden Volumina V_1 und V_2 auftreten. Dies wird durch die Abb. 1.8 b) und d) eindrucksvoll bestätigt.

2. Fall: ein Randradius und ein Randwinkel

In diesem Fall ist es natürlich nur sinnvoll, Radius und Randwinkel auf gegenüberliegenden Seiten vorzugeben. Deshalb sei hier exemplarisch ξ_0 und ϑ_h gewählt, ξ_h und ϑ_0 wären analog zu behandeln. Setzt man bei $\zeta=0$ den Radius ξ_0 in Gleichung (4.143) ein, ist

$$b = \operatorname{arcosh} \frac{\xi_0}{a} \quad (4.151)$$

Aus 4.144 folgt mit dem Randwinkel ϑ_h bei $\zeta=1$

$$a = \frac{1}{\operatorname{arsinh}(\theta_h) + b} \quad (4.152)$$

Bedingung (4.148) ist wie bei Fall 1 für definitionsgemäß positive b und positive θ_h wegen

$$0 \leq \frac{b}{\operatorname{arsinh}(\theta_h) + b} \leq 1 \quad (4.153)$$

immer erfüllt. Gleichung (4.151) und (4.152) bilden ein nichtlineares 2x2-Gleichungssystem für a und b , welches nicht durch Einsetzen lösbar ist. Die Lösung erfolgte iterativ mit dem Tabellenkalkulationsprogramm EXCEL. Die daraus berechneten Katenoiden sind in Abb. 4.16 für verschiedene ϑ_h -Werte bei $\xi_0=1,45$ und das sich nach (4.147) ergebende Volumenverhältnis V_1/V_2 in Abb. 4.17 aufgetragen. Wegen der großen Spanne, die das Volumenverhältnis als Funktion des Grundradius ξ_0 mit ϑ_h als Parameter überstreicht, wurde ein logarithmischer Maßstab gewählt.

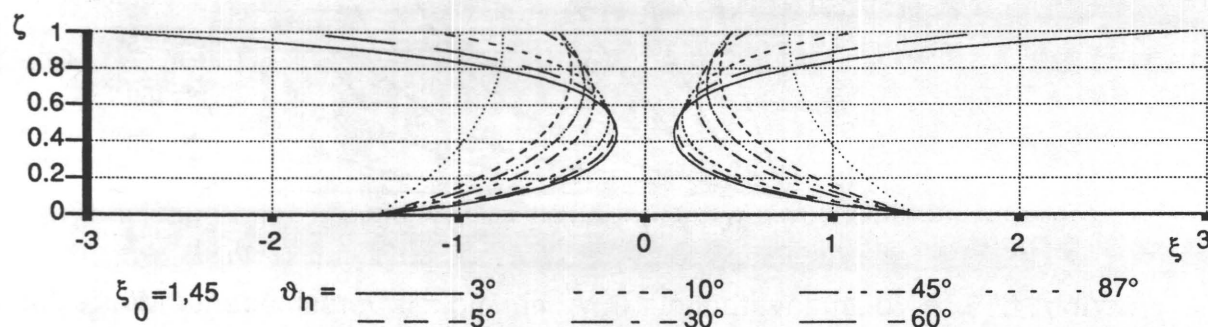


Abb. 4.16 Katenoiden für verschiedene Randwinkel ϑ_h bei $\xi_0=1,45$

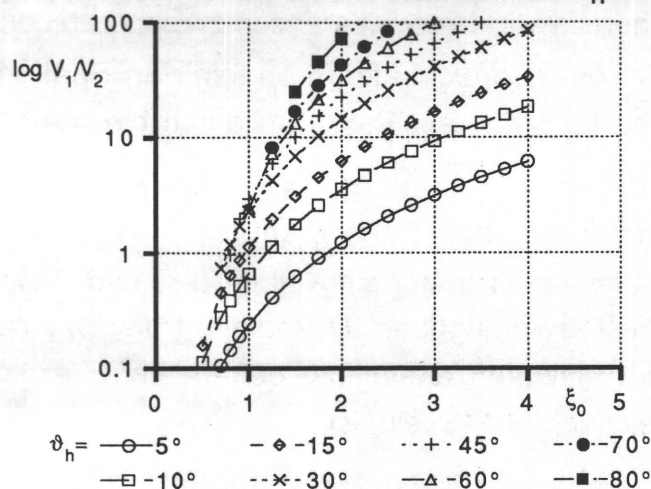


Abb. 4.17 Volumenverhältnis V_1/V_2 in Abhängigkeit verschiedener Werte für ξ_0 und ϑ_h

Der Fall eines festen Radius ξ_0 und eines sehr kleinen Winkels ϑ_h entspricht in etwa den Verhältnissen der in Abb. 1.1 und 1.2 dargestellten Einfärbevorgängen der druckenden Stellen von Flachdruckplatten und den hervorstehenden Rasterpunkten von Hochdruckplatten (insbesondere Kurve $\vartheta_h=3^\circ$ in Abb. 4.16). Die Annäherung dieser Farbspaltungsvorgänge der ersten Klasse durch eine Katenoide, bei der kein Drucksprung über die Berandung hinweg erfolgt, ist hier besonders sinnvoll, da die Bedingung des konstanten Volumens (4.90) durch die einseitig voll eingefärbten Walzen entfällt.

3. Fall: zwei Randradien

In diesem Fall ist wieder Gleichung (4.151) anzuwenden. Als zweite Bedingung kommt hinzu:

$$\xi_h = a \cosh\left(\frac{1}{a} - b\right) \quad (4.154)$$

Die Beziehungen (4.151) und (4.154) bilden wiederum ein nichtlineares Gleichungssystem für a und b , welches nur iterativ zu lösen ist. In Abb. 4.18 sind die berechneten Katenoiden für $\xi_0=1,45$ und verschiedene ξ_h -Werte aufgetragen, während Abb. 4.19 das Volumenverhältnis V_1/V_2 in Abhängigkeit von ξ_0 bei verschiedenen ξ_h -Werten zeigt.

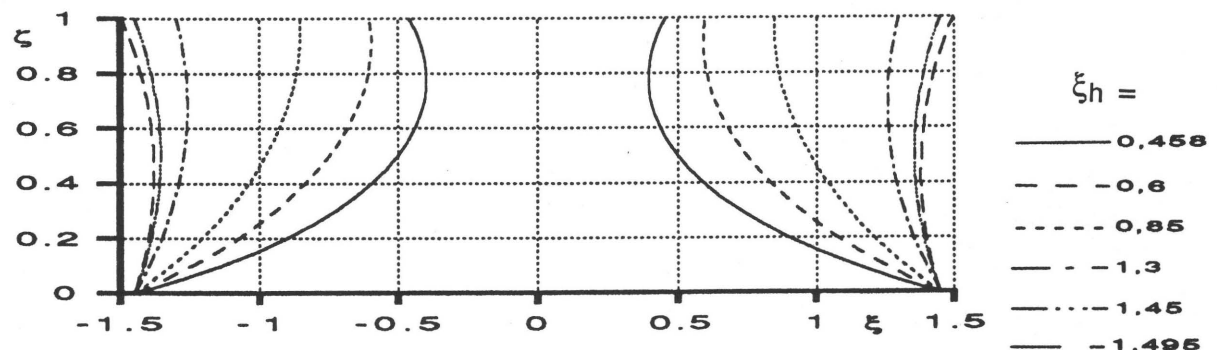


Abb. 4.18 Katenoiden für $\xi_0=1,45$ bei verschiedenen ξ_h -Werten.

Außerhalb der in Abb. 4.19 für ξ_h aufgetragenen Bereiche ist das iterative Verfahren divergent.

Überschreitet ξ_0 eine bestimmten Größe, verlaufen die Kurven in Abb. 4.19 nicht mehr monoton, sondern durchlaufen ein Maximum. Es kann also das gleiche Spaltungsverhältnis bei unterschiedlichen Kombinationen von ξ_0 und ξ_h auftreten. Steigt ξ_0 noch weiter, ergeben sich zwei getrennte Äste für die V_1/V_2 -Kurven, wobei zwischen den Ästen keine Lösung mit Randwinkeln kleiner als 90° gefunden werden kann.

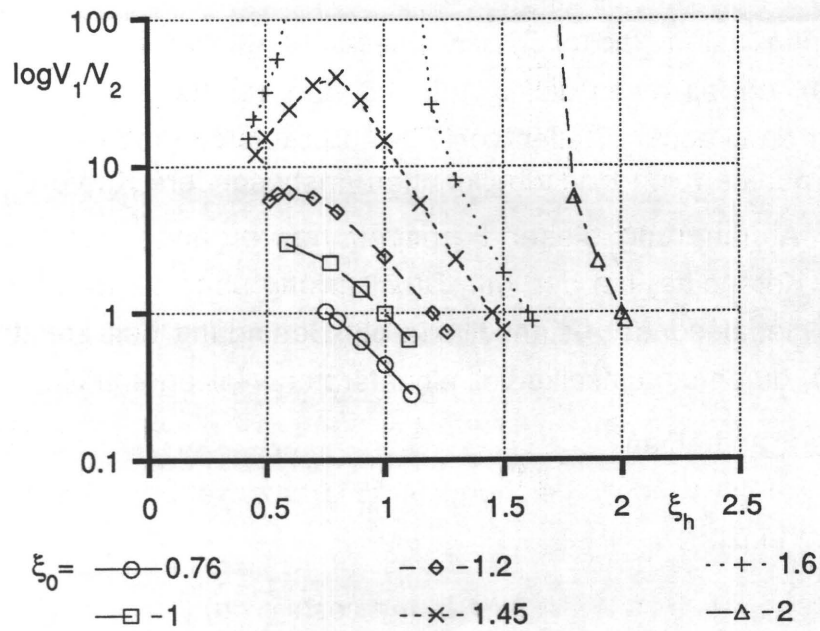


Abb. 4.19 Volumenverhältnis V_1/V_2 in Abhängigkeit von ξ_h bei verschiedenen ξ_0 -Werten

4. Fall: ein Randwinkel und Volumen

Bei vorgegebenem Volumen muß Gleichung (4.91) erfüllt werden. Setzt man (4.143) ein und integriert in den Grenzen $\zeta=0$ bis $\zeta=1$, folgt:

$$\frac{2V}{\pi h^3 a^3} = \sinh\left(\frac{1}{a} - b\right) \cosh\left(\frac{1}{a} - b\right) - \sinh(-b) \cosh(-b) + \frac{1}{a} \quad (4.155)$$

Da die sinh- bzw. cosh-Terme gerade die Randradien und -Winkel verkörpern, kann man auch schreiben:

$$\frac{2V}{\pi h^3 a^2} = \xi_h \theta_h - \xi_0 \theta_0 + 1 \quad (4.156)$$

Um die unbekannten Konstanten a und b aus vorgegebenem V , h und θ_0 berechnen zu können, muß das nichtlineare 2x2-Gleichungssystem aus Gleichung (4.149) und (4.155) gelöst werden. Wie in den vorherigen Fällen erfolgte dies numerisch. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.20 bzw. 4.21 wiedergegeben.

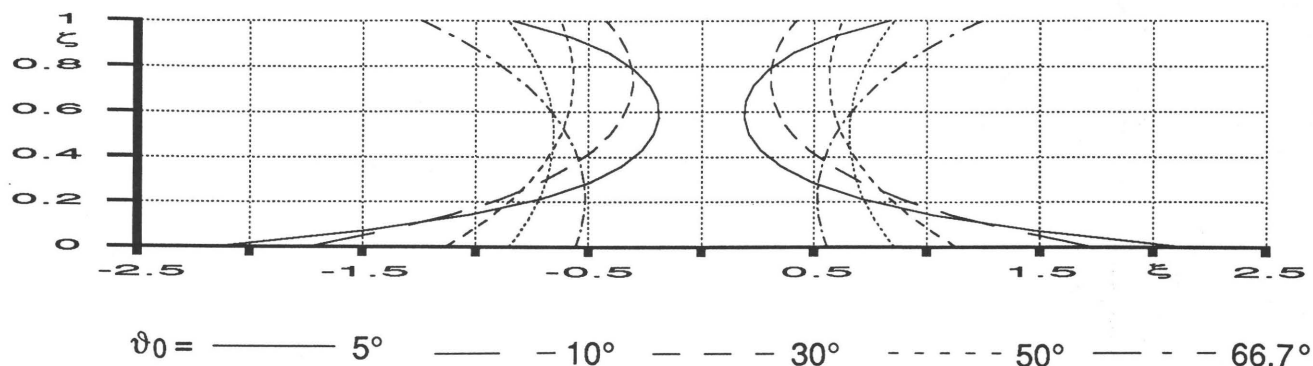


Abb. 4.20 Katenoiden für $V=1,643$ bei verschiedenen ϑ_0 -Werten.

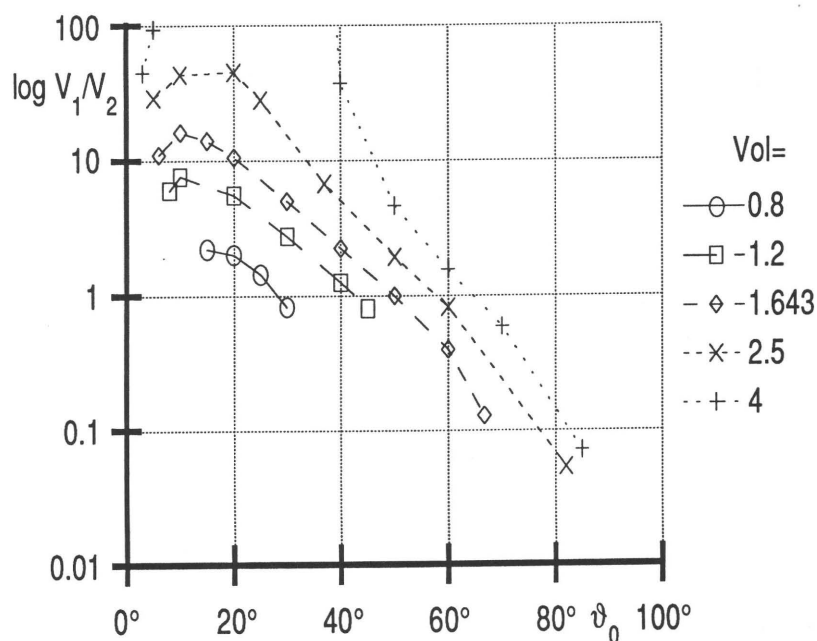


Abb. 4.21 Volumenverhältnis V_1/V_2 in Abhängigkeit von ϑ_0 bei verschiedenen V -Werten

Wie man aus Abb. 4.21 erkennt, durchlaufen die Kurven für V_1/V_2 in gewissen Bereichen Maxima, wie sie bereits bei Fall 3 aufgetreten waren.

5. Fall: ein Grundradius und Volumen

Die Volumenbedingung (4.155) läßt sich auch schreiben:

$$\frac{2V}{\pi h^3 a^2} = \frac{1}{2} \sinh \left[2 \left(\frac{1}{a} - \operatorname{arcosh} \frac{\xi_0}{a} \right) \right] + \xi_0 \sqrt{\frac{\xi_0^2}{a^2} - 1} + 1 \quad (4.157)$$

Das hier relevante Gleichungssystem aus (4.157) und (4.151) kann wiederum nicht explizit gelöst werden. Die numerischen Ergebnisse sind der Vollständigkeit halber in Abb. 4.22 und 4.23 dargestellt.

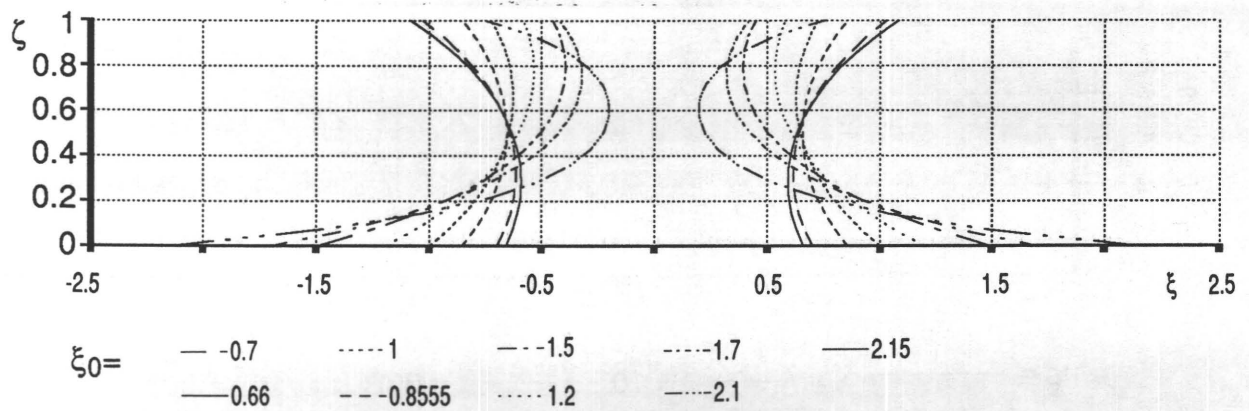


Abb. 4.22 Katenoiden für $V=1,643$ bei verschiedenen ξ_0 -Werten.

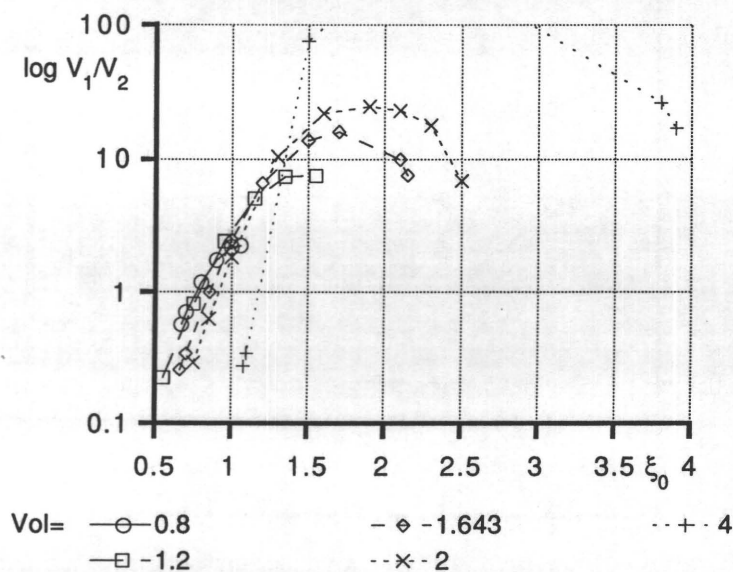


Abb. 4.23 Volumenverhältnis V_1/V_2 in Abhängigkeit von ξ_0 bei verschiedenen V -Werten

4.9 Lösung für das verwandte, ebene Problem

In den vorigen Kapiteln wurde die Lösung für das Problem der Bestimmung der Kontur einer zwischen zwei Platten gespannten rotationssymmetrischen Flüssigkeitsbrücke aufgezeigt. Ebenso interessant für die Drucktechnik ist das Problem einer in y -Richtung unendlich ausgedehnten Flüssigkeitslamelle, da sie einem zu druckenden, nicht gerasterten, sehr langen Querstrich entspricht, wie er in Abb. 4.24 angedeutet ist. Die Lösung dieses Problems ist mit den in

Im jetzt ebenen Fall geht nämlich R_2 gegen ∞ , und es wird mit den Bezeichnungen aus Abb. 4.24 unter Verwendung von (4.99) mit $\xi=X/h$:

Diese DGL ist wesentlich einfacherer Natur als die den rotationssymmetrischen Fall beschreibende DGL (4.97) und lässt sich mit einer Hilfssubstitution durch "Trennen der Veränderlichen" sofort lösen. Man erhält für die Konturkurve $\xi(\zeta)$ in dimensionslosen Koordinaten:

mit den Konstanten λ , c_1 und c_2 .

Wie bereits vorher diskutiert, bestimmen sich die Konstanten aus den Randbedingungen. Die Relationen zwischen den Konstanten und den Randradien bzw. Randabschnitten ξ_0 und ξ_h sowie ξ_{\min} sind in Abb. 4.25 eingetragen, wobei noch gilt:

61

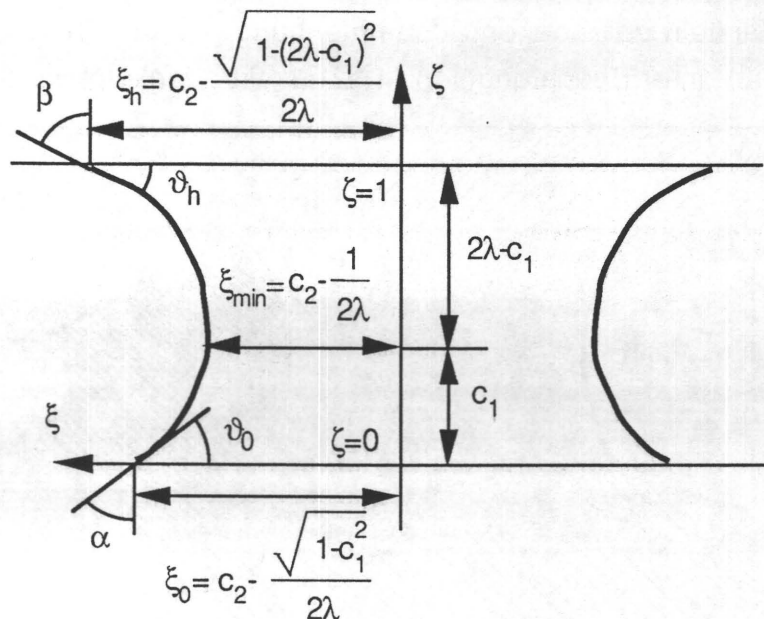
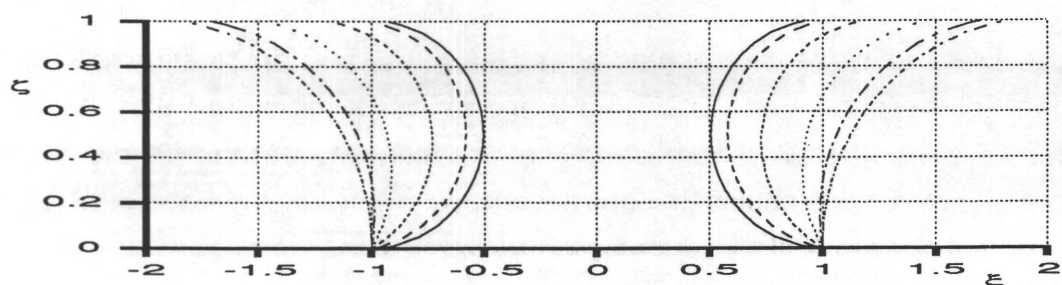


Abb. 4.25 Randbedingungen und geometrische Größen beim "unendlichen Balken"

Exemplarisch sind in Abb. 4.26 für verschiedene Randwinkel ϑ_0 bei gleichem ϑ_h nach Gleichung (4.159) gerechnete Konturkurven aufgetragen. Zu berücksichtigen ist, daß Gleichung (4.159) nur dann reelle ξ -Werte liefert, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$|c_1| \leq 1 \quad |2\lambda - c_1| \leq 1 \quad (4.161)$$



$$\vartheta_0 = \text{---} 1^\circ \quad \text{---} 10^\circ \quad \text{---} 30^\circ \quad \text{---} 60^\circ \quad \text{---} 80^\circ \quad \text{---} 89^\circ \quad \vartheta_h = 10^\circ$$

Abb. 4.26 gerechnete Konturkurven für den "unendlichen Balken"

Für die Kurven in Abb. 4.26 sind:

ϑ_0	1°	10°	30°	60°	80°	89°
c_1	0,9998	0,9848	0,8660	0,5000	0,1736	0,0175
c_2	1,0088	1,0882	1,2701	1,5833	1,8501	1,9980
λ	0,9923	0,9848	0,9254	0,6634	0,5792	0,5011
A	0,6135	0,6903	0,8585	1,1583	1,4373	1,5898

Bei den in Abb. 4.26 gezeichneten Kurven wurden die Konstanten c_1 , c_2 und λ so gewählt, daß trotz unterschiedlicher Randwinkel ϑ_0 immer der Ausgangsabschnitt $\xi_0=1$ ist. Damit ähnelt diese Konfiguration dem Fall der in Abb. 1.1 und 1.2 dargestellten Farbspaltungsvorgängen der ersten Klasse (vgl. Kap. 4.8 Fall 2). Die Querschnittsfläche A des Balkens oberhalb der ζ -Achse hat hier die dem Volumen der rotationssymmetrischen Flüssigkeitsbrücke äquivalente Funktion und wird aus einer Integration über (4.159) in den Grenzen von $\zeta=0$ bis $\zeta=1$ gewonnen mit:

$$A = \int_0^1 \xi d\zeta = c_2 - \frac{1}{8\lambda} \left[\arcsin(k) + \arcsin(2\lambda - k) + (2\lambda - k)\sqrt{1 - (2\lambda - k)^2} + k\sqrt{1 - k^2} \right] \quad (4.162)$$

Im Fall des "unendlichen Balkens" gelingt es also, direkte algebraische Zusammenhänge zwischen den die Kontur bestimmenden Parametern (c_1 , c_2 und λ) und den geometrischen Randbedingungsgrößen A , ξ_0 , ξ_h , ϑ_0 und ϑ_h herzustellen.

Beim Fall der rotationssymmetrischen Flüssigkeitsbrücke ist dies weitaus schwieriger, was eine numerische Methode erfordert, die im nächsten Kapitel behandelt wird.

4.10 Numerische Lösung der Kontur-DGL (4.13)

Aus der Lösung für die Kontur des rotationssymmetrischen Tropfens (4.125) gelingt es nicht, die beiden unbekannten Konstanten c und λ aus der zulässigen Menge der geometrischen Randgrößen zu bestimmen. Daher wird hierzu eine numerische, iterative Lösung angewandt. Im vorliegenden Fall wurde das zur Lösung von Differentialgleichungen auch höherer Ordnung bewährte Verfahren nach Runge-Kutta in der Formulierung nach /28/ gewählt. Dabei formt man die DGL des Tropfenkonturproblems (4.13) bzw. (4.97) (hier in dimensionsloser Form nach ξ aufgelöst)

$$\xi'' = 2\lambda(\xi'^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\xi}(\xi'^2 + 1) \quad (4.97)'$$

in ein System von DGLn erster Ordnung um.

Das Runge-Kutta-Verfahren ist eine Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen, d. h. man benötigt Startwerte für ξ und ξ' bei $\zeta=0$. Sind beispielsweise die Startwerte bei $\zeta=0$ (d.h. ξ_0 und ϑ_0) fest vorgegeben, kann man λ so

lange variieren, bis eine dritte Bedingung, z.B. das vorgegebene Volumen, erreicht ist. Wenn allerdings andere Randbedingungen als ξ_0 und ϑ_0 zu berücksichtigen sind, muß ein weiteres Iterationsverfahren für die Anpassung eines der beiden Startwerte eingebunden werden. Man nennt in diesem Fall solche Lösungsmethoden "Schießverfahren". Das dafür auf der Rechenanlage DEC PDP-10 des Fachbereiches Maschinenbau der THD unter teilweiser Verwendung der IMSL-Unterprogramm-Bibliothek entwickelte FORTRAN-Programm KONTUR führt die beiden Iterationen ineinander geschachtelt aus. Wenn beispielsweise die Kontur aus zwei Randwinkeln und gegebenem Volumen zu berechnen ist, wird zunächst, ausgehend von einem Startwert für ξ_0 , durch Variation des Parameters λ der richtige Randwinkel ϑ_h bei $\zeta=1$ eingestellt. Dabei wird solange iteriert, bis eine vorgebbare prozentuale Schranke ε unterschritten wird. Durch Variation von ξ_0 wird dann das vorgegebene Volumen sukzessive approximiert.

Das Programm startet mit negativen Ausgangswerten für λ , da somit auf alle Fälle die Stelle $\zeta=1$ erreicht wird, ohne daß irgendwo zwischen $\zeta=0$ und 1 der Wert von ξ' unendlich wird. Bei der Iteration wird die Variation $\Delta\lambda$ des Parameters λ nach Gleichung 4.163 so gesteuert, daß sie proportional zum Betrag der normierten Differenz des Ist- und Sollwinkels gesetzt wird.

$$\Delta\lambda = \omega \operatorname{sgn}(q) \left| \frac{\theta_{h_{\text{Ist}}} - \theta_{h_{\text{Soll}}}}{\theta_{h_{\text{Soll}}}} \right| \quad (4.163)$$

Dabei ist ω ein Proportionalitätsfaktor, der die Anpassungsgeschwindigkeit bestimmt. Um auf der sicheren Seite zu liegen, sollte er erfahrungsgemäß in der Größenordnung von 0,05 bleiben. Der Parameter q steuert das Vorzeichen von $\Delta\lambda$ und ist daher entweder gleich +1 oder -1. Wenn nach Erreichen des gewünschten Randwinkels das Ist-Volumen noch nicht innerhalb der Toleranzgrenze liegt, wird nun der Startwert ξ_0 entsprechend variiert. Durch Verändern des Ausgangsradius ξ_0 wird aber wiederum der Randwinkel ϑ_h beeinflusst, der durch erneutes Korrigieren von λ wieder justiert werden muß. Stimmt der obere Randwinkel wieder, kann ein weiterer Volumen Anpassungsschritt erfolgen und so fort.

Die Verfahrensschritte wurden in dieser Reihenfolge gewählt, da der Ausgangsradius das Tropfenvolumen in grober Näherung quadratisch beeinflusst, der Parameter λ den Randwinkel dagegen linear (vgl. Gleichung (4.95)).

Die Qualität des iterativen Lösungsverfahrens kann am besten an einem Beispiel demonstriert werden. Für die Tropfenkontur aus der vorletzten Fotografie der Sequenz in Abb. 1.8 c) wurden die Randwinkel

$$\vartheta_0=66^\circ \text{ und } \vartheta_h=67^\circ$$

und die Tropfenhöhe

$$h=1,14\text{mm}$$

gemessen. Aus einer hohen Vergrößerung wurden in äquidistanten Schritten die Durchmesser von plattenparallelen Schnitten abgemessen. In Abb. 4.27 sind die so entstandenen Stützstellen mit Dreieckssymbolen gekennzeichnet. Aus einer Kurvenanpassung mit Hilfe eines Polynoms 6.ten Grades und 100 Stützstellen konnte das Tropfenvolumen bestimmt werden (IMSL-Unterprogramm DCADRE) mit $V=0,1794 h^3 = 0.2658 \text{ mm}^3$.

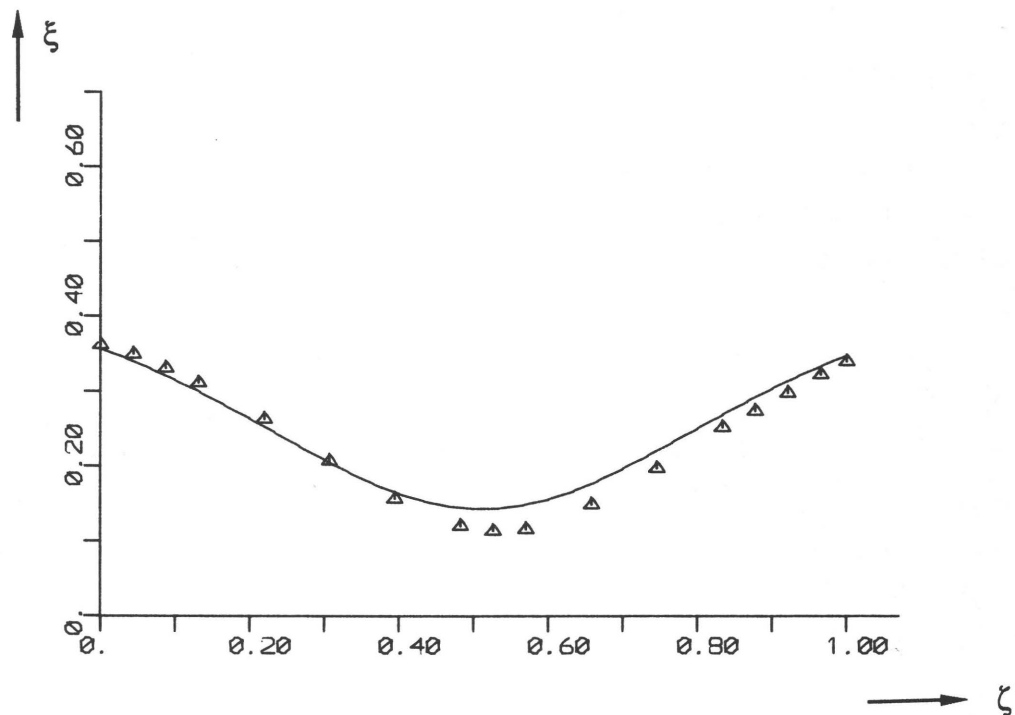


Abb. 4.27 Vergleich zwischen gemessener Tropfenkontur (eingezeichnete Stützstellen) und gerechneter Kontur (durchgezogene Kurve)

Mit diesen Vorgaben berechnete das Programm KONTUR die in Abb. 4.27 durchgezogene eingezeichnete Kurve mit einer relativen Genauigkeitsschranke von $\varepsilon=0.03=3\%$. Es ergaben sich aus der Iteration die Werte für die Konstanten:

$$\lambda = -1,826 \quad \text{und} \quad c = 0,100$$

Der relativ hohe Betrag von λ erklärt sich aus der Tatsache, daß der Tropfen kurz vor dem Abriß steht und somit stark "gespannt" ist.

4.11 Randwinkel und Grundradien während des Trennvorgangs

In den vorangegangenen Kapiteln wurden nur die theoretisch, rein mathematisch möglichen Randbedingungen diskutiert. Für die praktische Anwendung in der Drucktechnik wäre es aber wünschenswert, aus den grenzflächenphysikalischen Materialeigenschaften der beteiligten Stoffe die Randbedingungen an den Dreiphasengrenzen für den Spaltungsvorgang voraussagen zu können, um schließlich aus der Rechnung das wahrscheinliche Spaltungsverhältnis angeben zu können. Wichtige Vorarbeiten dazu wurden von Steidel u.a. /15/ durchgeführt, die neue Erkenntnisse zur Bestimmung der grenzflächenphysikalischen Eigenschaften der beteiligten Festkörper liefern. Man wäre damit in der Lage, nach der Young-Dupréschen Gleichung den statischen Randwinkel vorauszusagen. Daß man damit aber nicht die tatsächlichen Verhältnisse beim Spaltungsvorgang beschreiben kann, belegen eigene Messungen.

4.11.1 Messungen

Für das physikalische Verhalten an den Dreiphasenkontaktstellen beim Problem der Flüssigkeitsspaltung sind zwei Extreme denkbar. Die erste Annahme wäre, daß der aus den Randwinkelmessungen mit sitzenden Tropfen (Abb. 4.6) gewonnene Randwinkel konstant bleibt, und der zugehörige Radius sich wegen des vorgegebenen, konstanten Volumens frei einstellt. Das andere Extrem stellt eine festgehaltene Dreiphasenkontaktlinie dar, gleichbedeutend mit absoluter Haftung der Flüssigkeit an den Wänden (vgl. Haftbedingung an festen Wänden, die die wichtigste Forderung der Grenzschichttheorie darstellt) mit der Folge, daß die einmal benetzte Grundfläche, also der Grundradius, konstant bleibt und sich der Randwinkel beliebig verändern kann. Diese Annahme, auf ebenen Oberflächen ohne grenzflächenphysikalische "Kanten", muß allerdings mit der Young-Dupréschen Gleichung kollidieren (unter der Voraussetzung konstanter γ -Größen).

Für den hier beobachteten Fall der quasi statischen Tropfenseparation kann anhand einer großen Zahl von Versuchen festgestellt werden, daß sich aber sowohl die Grundradien, als auch die Randwinkel mit dem Plattenabstand h verändern. Als typische Beispiele für das zu beobachtende Verhalten seien hier für die drei Flüssigkeits-Festkörper-Kombinationen aus Abb. 1.8 a), b) und

c) die Randradien und Randwinkelmeßwerte in Abb. 4.28 aufgezeigt. In Abb. 4.28 ist neben diesen Daten noch der aus den Vergrößerungen der Fotografien ausgemessene Minimalradius angegeben, der mit wachsendem Plattenabstand stets monoton abnimmt.

Die Auswahl der benutzten Festkörpermateriale und Flüssigkeiten geschah derart, daß möglichst Extremfälle hinsichtlich des Benetzungsverhaltens auftreten würden. Gute Benetzbarkeitseigenschaften lassen sich für Metalle mit hohem polarem Wechselwirkungsvermögen erwarten (z.B. Stahl). Der Kunststoff Teflon (PTFE Polytetrafluorethylen) ist mit seiner äußerst geringen Oberflächenspannung γ_S von 19,5 mN/m /29/ dagegen das Material, was sich am schlechtesten benetzen läßt (Anti-Haft-Beschichtung von Kochgeschirr !). Dieses Material ist daher fast schon Standard bei grenzflächenphysikalischen Untersuchungen geworden.

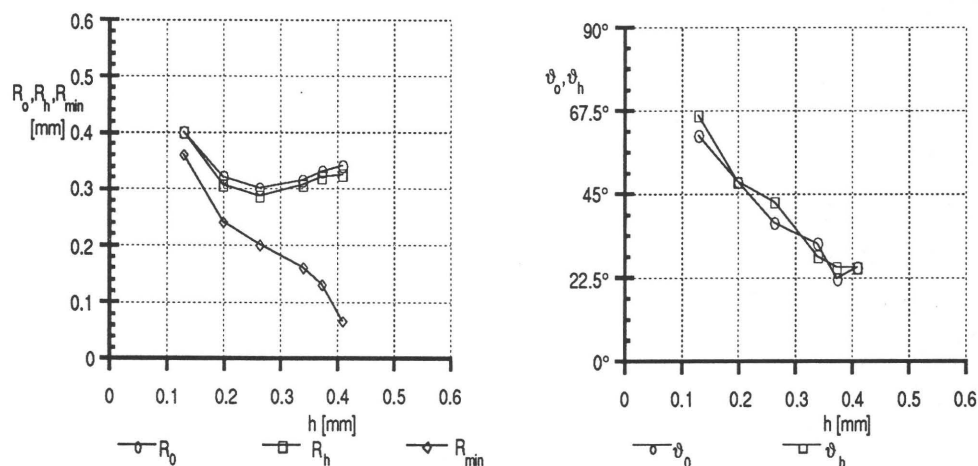


Abb. 4.28 a) Kombination: Stahl($z=0$)/Normalöl/Stahl($z=h$):

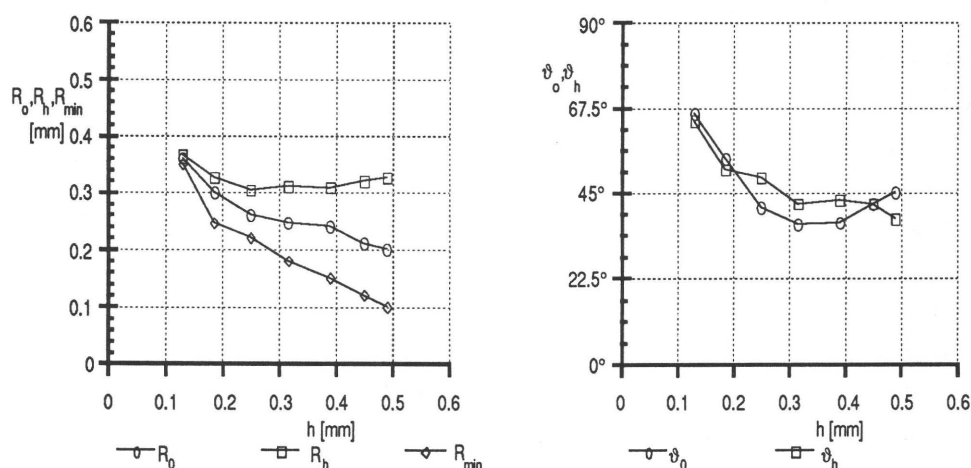


Abb. 4.28 b) Kombination: Teflon($z=0$)/Glyzerin/Stahl($z=h$):

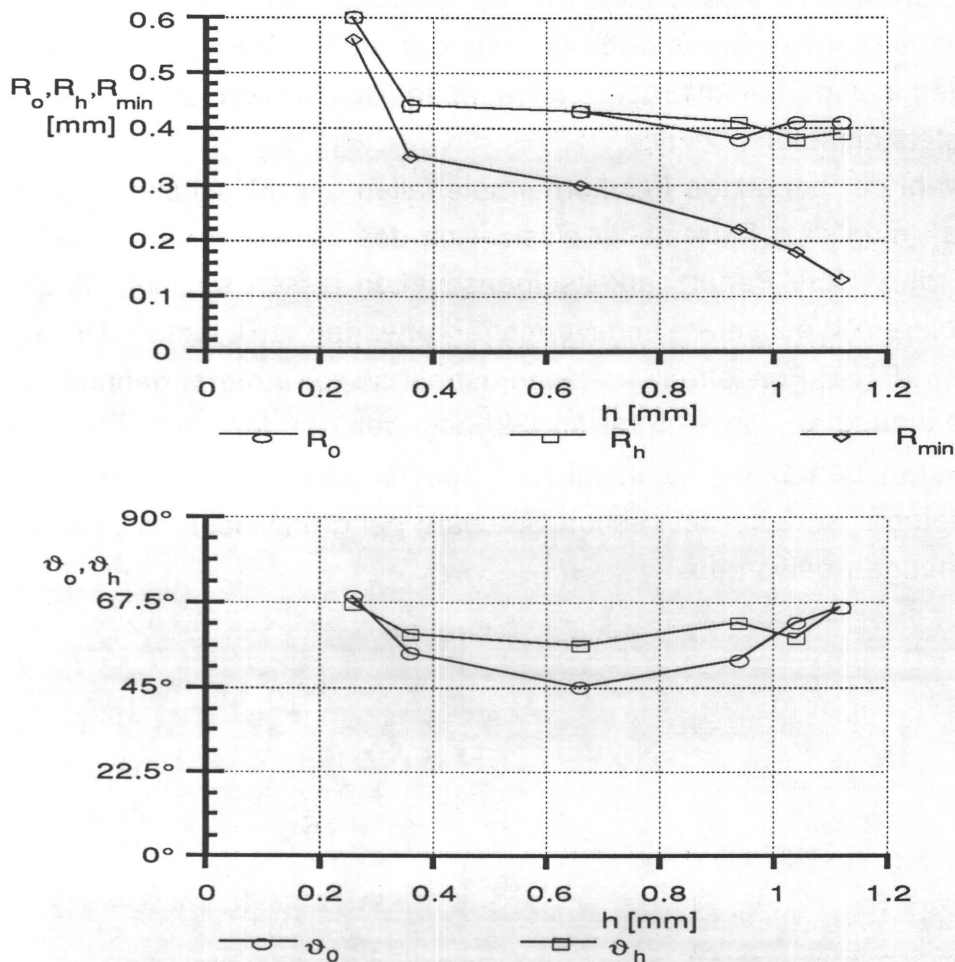


Abb. 4.28 c) Kombination: Teflon($z=0$)/Glyzerin/Teflon($z=h$)
 Abb. 4.28 Aus Fotosequenzen ausgemessene Radien und Randwinkel während des Spaltungsvorgangs bei diskontinuierlicher Plattenbewegung

Bei der Anfertigung der mit Hilfe der Fotoeinrichtung eines Makroskops aufgenommenen Fotosequenzen wurde so vorgegangen, daß nach Aufbringen der Flüssigkeit und Bilden der Flüssigkeitsbrücke die (gegen axiales Verdrehen gesicherten) Platten mit Hilfe einer Mikrometerschraube diskontinuierlich auseinanderbewegt wurden. Um Ausgleichsvorgänge zuzulassen, wurde zwischen Verstellen des Plattenabstands und der Aufnahme ca. 5 Sekunden Verweilzeit eingehalten. Da relativ hochsiedende Fluide verwandt wurden, ist anzunehmen, daß Verdunstungseffekte zu vernachlässigen sind. Die mit "Öl" bezeichnete Flüssigkeit ist ein von der physikalisch-technischen Bundesanstalt in Braunschweig zu beziehendes sog. Normalöl mit garantiert Newtonschen Fließeigenschaften ($\eta=17,3$ Pas bei 21°C).

Aus den Abbildungen 4.28 a) bis c) lassen sich einige Tendenzen, die immer wieder auftreten, deutlich erkennen:

- 1) Bei gut benetzenden Kombinationen wie Stahl-Öl-Stahl (Abb. 4.28 a) nehmen die Randwinkel mit dem Plattenabstand stark ab, während sie im Falle schlechter benetzbarer Oberflächen wie Teflon (Abb. 4.28 c) zunächst abnehmen, um mit größerem Plattenabstand wieder zuzunehmen. Dies beruht im letzteren Fall wahrscheinlich auf der Neigung zur Ausbildung undoloidartiger Formen mit Wendepunkten.
- 2) Nachdem die Grundradien zunächst rapide abnehmen (was aus Kontinuitätsgründen plausibel ist), bleiben sie ab einem bestimmten Plattenabstand verhältnismäßig konstant.
- 3) Auch bei den nicht durch Ausbildung von Wendepunkten eindeutig charakterisierbaren Tropfenformen aus Abb. 1.8 a) handelt es sich um Undoloiden, was durch das Approximieren mit Hilfe des Programms KONTUR (vgl. Kap. 4.7) nachgewiesen werden kann. Das bedeutet aber, daß bei diesen quasi statisch verlaufenden Spaltungsvorgängen der Innendruck stets größer ist, als der Außendruck. Die Konsequenz daraus ist, daß für den Fall der langsamen Spaltungsbewegung niemals "kavitative Spaltung" auftreten kann.

Die gleichen Beobachtungen gelten, wenn man anstelle der diskontinuierlichen Spaltungsbewegung zu langsamer, kontinuierlicher Bewegung übergeht.

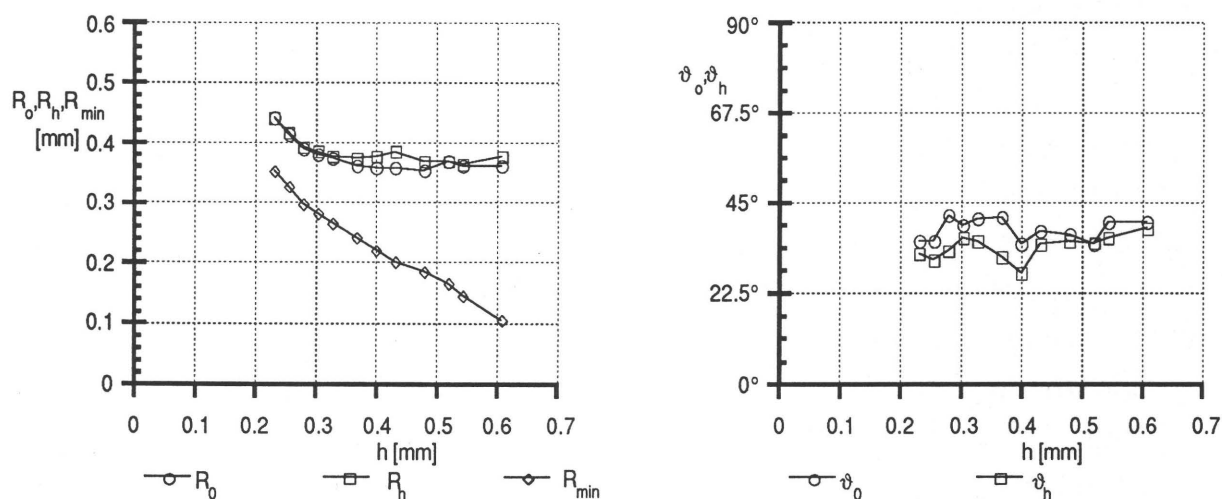


Abb. 4.29 Aus Fotosequenzen ausgemessene Radien und Randwinkel während des Spaltungsvorgangs bei kontinuierlicher Plattenbewegung. Kombination: Teflon($z=0$)/Glyzerin/Stahl($z=h$)

In Abb. 4.29 sind dazu die Meßwerte einer weiteren Festkörper-Flüssigkeit-Festkörper-Kombination aufgeführt. Bei diesen Messungen wurde die Mikrometerschraube für den Plattenabstand mit Hilfe eines Elektromotors kontinuierlich bewegt (Geschwindigkeit der oberen Platte $w_h=0,415$ mm/s), wobei währenddessen mit Hilfe eines Video-Systems (IBAS-System der Fa. Zeiss) in festen Zeitabständen die Bilder aufgenommen und abgespeichert wurden. Die dann vom Video-Monitor abfotografierten Sequenzen haben eine schlechtere Auflösung als die Fotos, die für Abb. 1.8 direkt im Mikroskop aufgenommen wurden. Dadurch lassen sich die deutlich höheren, auf Ablesefehlern beruhenden Schwankungen der Randwinkelmeßwerte in Abb. 4.29 erklären.

Erstaunlicherweise sind die auf dem bekannterweise schlecht benetzbaren Teflon gemessenen Randwinkel grundsätzlich extrem niedrig und unterscheiden sich nur wenig von den auf der Stahloberfläche auftretenden. Bei statischen Messungen von sitzenden Tropfen im Goniometermikroskop findet man dagegen für Glyzerin auf Teflon Randwinkel von 100° . Wie läßt sich diese Diskrepanz erklären?

4.11.2 Vorrück- und Rückzugswinkel

In der klassischen Betrachtungsweise spricht man vom statischen Randwinkel, wenn die auf einen Festkörper aufgesetzte Flüssigkeit zur Ruhe gekommen ist. Man mißt jedoch je nachdem, ob der Randwinkel nach dem Vorrücken oder nach dem Rückzug der Dreiphasengrenzlinie entstanden ist, unterschiedliche Winkel. In der Tat findet, wie man aufgrund der angegebenen Randradienwerte deutlich sieht, in der Anfangsphase der hier betrachteten Spaltungsbewegung ein starker, sich später abschwächender Rückzug der makroskopisch sichtbaren Dreiphasengrenzlinie statt. Ausschlaggebend für die Kontur des Tropfens und die Lage der freien Oberfläche ist also der Rückzugsrandwinkel. Daß man dagegen beim Zusammenfahren der Platten ein Vorrücken der Dreiphasengrenzlinie und mit dem nun maßgeblichen Vorrückwinkel eine deutlich veränderte Tropfenform erhält, beweist Abb. 4.30.

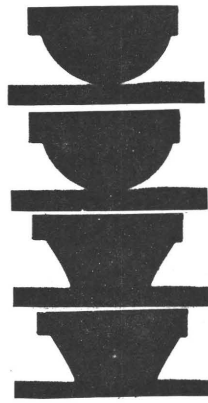


Abb. 4.30 Tropfenkontur der Kombination Teflon/Glyzerin/Stahl (aus Abb. 4.29) beim kontinuierlichen Zusammenfahren der Platten

Der sich beim Vorrücken (=Zusammenfahren der Platten) der Dreiphasengrenzlinie zwischen Glyzerin, Luft und Teflon einstellende Randwinkel beträgt 112° (aus Abb. 4.30 ausgemessen). Dieser Winkel liegt noch über dem statisch gemessenen. Es ist also anzunehmen, daß - obwohl bei den statischen Randwinkelmessungen im Goniometer, um unter allen Umständen den Vorrückwinkel zu erhalten, kurz nach dem Aufsetzen des Tropfens nochmals Flüssigkeit per Injektionsnadel nachgefördert wurde - bereits randwinkelreduzierende Ausgleichsvorgänge an der Dreiphasengrenze einsetzen.

Die Diskrepanz zwischen dem Vorrück- und dem Rückzugswinkel wird als Randwinkelhysterese bezeichnet. Als Ursache dafür werden oft die Rauigkeit und Porosität der Festkörperoberfläche oder Verschmutzungen genannt, die die Beweglichkeit der Dreiphasenkontaktlinie beeinträchtigen.

Das Auftreten der Randwinkelhysterese legt somit nahe, daß beim Zurückziehen der makroskopischen Kontaktlinie ein hauchdünner Flüssigkeitsfilm oder zumindest mit Flüssigkeit gefüllte Rauigkeitstäler zurückbleiben. Die Filme sind jedoch so dünn, daß sie in den Fotografien, die eine Projektion des Tropfenumrisses darstellen, nicht zu erkennen sind. In der Tat sieht man jedoch (bei leicht schräger Beobachtung) bei Versuchen mit Farbflüssigkeiten (z. B. Abb. 1.8 e) und f)), daß selbst beim Zurückziehen auf Teflon noch Farbspuren übrigbleiben.

Der in Abb. 1.8 d) auftretende relativ große Randwinkel läßt darauf schließen, daß bei der dort abgebildeten diskontinuierlichen Spaltung die Verdunstung des leicht flüchtigen Formamids eine große Rolle spielt. Dies ist aufgrund der geringen Dicke des Films sehr wahrscheinlich. Der sich einstellende Randwinkel nähert sich somit durch den sich wieder stärker bemerkbar machenden

Einfluß des Untergrunds dem Vorrückwinkel. Aber auch in diesem Beispiel bleibt der Rückzugswinkel unter 90° , so daß die Spaltung nicht an der Phasengrenze zwischen Flüssigkeit und Festkörper, sondern innerhalb der Flüssigkeit stattfindet.

Besonders deutlich kann man die Randwinkelhysterese am Beispiel eines eine schiefe Ebene hinablaufenden Tropfens beobachten (Abb. 4.31), da hier Vorrück- und Rückzugswinkel gleichzeitig auftreten.

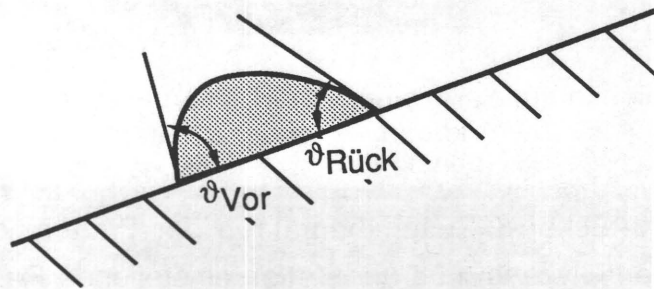


Abb. 4.31 Randwinkelhysterese am Tropfen auf schiefer Ebene

An diesem Beispiel, das der alltäglichen Beobachtung eines an einer Fensterscheibe hinablaufenden Regentropfens entspricht, wird nochmals anschaulich, daß es sich beim Zurückziehen der Dreiphasengrenzlinie strenggenommen nicht mehr um einen Randwinkel zwischen trockenem Festkörper, Flüssigkeit und Luft handelt, sondern sich ein Randwinkel zwischen benetztem Festkörper, Flüssigkeit und Luft bildet. Dieser Randwinkel ist nicht, wie man bei Flüssigkeiten quasi "auf sich selbst" vermuten würde, gleich Null, sondern nimmt einen makroskopisch meßbaren Wert an, der nicht nur von den grenzflächenphysikalischen Eigenschaften der beteiligten Materialien, sondern auch stark von der Kinetik des Vorgangs abhängt. Bei Randwinkelausbildungen im Zusammenhang mit Verschiebungen der Dreiphasengrenzlinie spricht man deswegen generell vom "dynamischen" Randwinkel.

Wegen des erwähnten, molekülagendicken Films bei der Ausbildung der makroskopischen Randwinkel und Randradien handelt es sich selbst bei "unendlich langsamer" Flüssigkeitsspaltung um ein dynamisches Problem. In den folgenden Kapiteln wird daher versucht, den Spaltungsvorgang dynamisch zu untersuchen. Dazu müssen außer den Vorgängen an der dynamischen Dreiphasenkontaktlinie, auf die in Kap. 5.3.3 nochmals eingegangen wird, auch die Strömungsvorgänge im Innern der Flüssigkeitsbrücke berücksichtigt werden.

5. Dynamischer Fall

Verläßt man die in Kapitel 4 getroffene Annahme, daß die zur Farbspaltung führende Bewegung unendlich langsam verläuft, muß man die bewegungsinduzierten hydrodynamischen Kräfte mitberücksichtigen. Um ihre Größenordnungen zu kennen, seien zunächst einige Überlegungen zu den in der Drucktechnik vorkommenden Farbspaltungsvorgängen vorangestellt.

5.1 Beschleunigungen beim Farbspaltungsprozeß

Bei den drei Hauptdruckverfahren findet die Farbspaltung im Auslauf des Spaltes zweier aufeinander abrollender Walzen (Zylinder) statt. Abb. 5.1 verdeutlicht die geometrischen Verhältnisse am Auslauf eines Walzenspaltes unter der vereinfachenden Annahme, daß der Abstand zweier Berührungspunkte in dem für die Farbspaltung relevanten Bereich (ca. 10mm in x-Richtung von der Mittellinie) ohne großen Fehler als senkrecht angenommen werden kann.

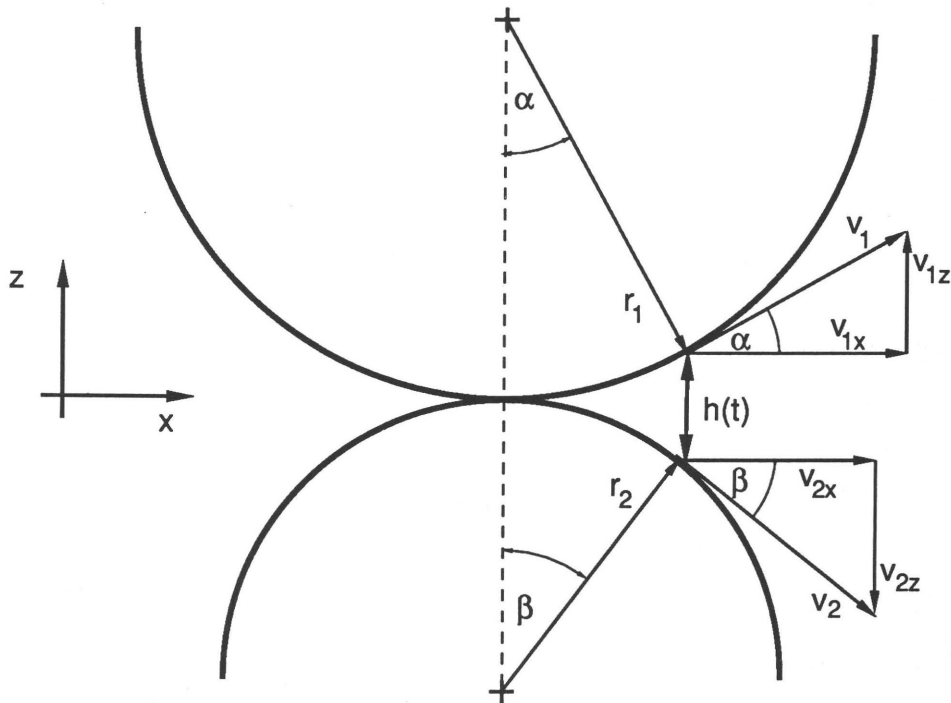


Abb. 5.1 senkrechter Abstand zweier Berührungspunkte nach Durchlauf durch Walzenspalt

Die Größen in der Abbildung sind; falls sie sich nicht von selbst erklären

- α, β = Verdrehwinkel der Walze 1 bzw. Walze 2
 $v_1 = v_2 = v$ = Umfangsgeschwindigkeiten
 v_{1z}, v_{2z} = Vertikalkomponente von v_1, v_2
 v_{1x}, v_{2x} = Horizontalkomponente von v_1, v_2
 ω_1, ω_2 = Winkelgeschwindigkeit der Walze 1 bzw. Walze 2

Die Änderung des Abstands $h(t)$ zweier sich ohne Durchrutschen berührender Punkte verändert sich mit der Zeit:

$$\dot{h} = v_{1z} + v_{2z} = \omega_1 r_1 \left[\sin(\omega_1 t) + \sin\left(\omega_1 \frac{r_1}{r_2} t\right) \right] = v \left[\sin\left(\frac{v}{r_1} t\right) + \sin\left(\frac{v}{r_2} t\right) \right] \quad (5.1)$$

Durch Integrieren bzw. Differenzieren erhält man:

$$h = r_1 \left[1 - \cos(\omega_1 t) \right] + r_2 \left[1 - \cos\left(\omega_1 \frac{r_1}{r_2} t\right) \right] + h_0 = r_1 \left[1 - \cos\left(\frac{v}{r_1} t\right) \right] + r_2 \left[1 - \cos\left(\omega_1 \frac{v}{r_2} t\right) \right] + h_0 \quad (5.2)$$

$$\ddot{h} = \omega_1^2 r_1 \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{r_1}{r_2} \cos\left(\omega_1 \frac{r_1}{r_2} t\right) \right] = \frac{v^2}{r_1} \left[\cos\left(\frac{v}{r_1} t\right) + \frac{r_1}{r_2} \cos\left(\frac{v}{r_2} t\right) \right] \quad (5.3)$$

Zum Abschätzen der Größenordnungen der in der Drucktechnik charakteristischen Farbtrenngeschwindigkeiten und Beschleunigungen werden zur Vereinfachung gleiche Radien $r_1 = r_2 = r$ und kleine Winkel α angenommen. Näherungsweise wird dann:

$$h = 2r \left[1 - \cos\left(\frac{v}{r} t\right) \right] + h_0 \approx h_0 \quad (5.4)$$

$$\dot{h} = 2v \sin\left(\frac{v}{r} t\right) \approx 2 \frac{v^2}{r} t \quad (5.5)$$

$$\ddot{h} = b = 2 \frac{v^2}{r} \cos\left(\frac{v}{r} t\right) \approx 2 \frac{v^2}{r} \quad (5.6)$$

Die Größe h_0 stellt die Ausgangshöhe zur Zeit $t=0$ dar, und b steht für die Beschleunigung.

Von grundsätzlicher Bedeutung für die Berechnung von Strömungsvorgängen ist die Frage, ob bestimmte Einflußgrößen gegenüber anderen überwiegen und somit durch Vernachlässigung der untergeordneten Größen Vereinfachungen ermöglichen. Auskunft darüber geben dimensionslose Gruppen (Kenngrößen), die aus den maßgeblichen Parametern gebildet werden. Die wichtigsten Kenngrößen können als Kräfteverhältnisse gedeutet werden:

$$\text{Reynoldszahl} = \text{Re} = \frac{UL\rho}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} \quad (5.7)$$

$$\text{Froudezahl} = \text{Fr} = \frac{U^2}{Lg} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}} \quad (5.8)$$

$$\text{Weberzahl} = \text{We} = \frac{\rho U^2 L}{\gamma_L} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Oberflächenspannungskraft}} \quad (5.9)$$

$$\text{Kapillaritätszahl} = \text{Ca} = \frac{\eta U}{\gamma_L} = \frac{\text{Reibungskraft}}{\text{Oberflächenspannungskraft}} \quad (5.10)$$

Es sind:

- U = charakteristische Geschwindigkeit
- L = charakteristische Länge
- ρ = Dichte der Flüssigkeit (hier generell $\rho_{\text{Farbe}} \approx \rho_{\text{H}_2\text{O}} \approx 1000 \text{ kg/m}^3$)
- η = Viskosität der Flüssigkeit
- γ_L = Oberflächenspannung der Flüssigkeit
- g = Erdbeschleunigung (hier generell = $9,81 \text{ m/s}^2$ gesetzt)

Als charakteristische Länge wird, wie in Kap. 4.2, die dritte Wurzel aus dem Tropfenvolumen gewählt.

Bei dem in Wirklichkeit instationär verlaufenden Farbspaltungsvorgang fällt es schwer, eine charakteristische Geschwindigkeit zu definieren. Aus der Definition (5.9) der Weberzahl läßt sich (z.B. für $\text{We}=1$) eine Geschwindigkeit ableiten mit

$$U = \sqrt{\frac{\gamma_L}{\rho L}} \quad (5.11)$$

Damit erhält man natürlich keine Aussage über die Größenverhältnisse von Trägheits- zu Oberflächenspannungskräften.

Man kann aber auch aufgrund der konstant beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit U durch b und h ausdrücken. Es ist nämlich:

$$U = \sqrt{2b(h-h_0)} \quad (5.12)$$

Mit der groben Näherung $h \approx L$ läßt sich die Reynoldszahl abschätzen in der Form:

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{2bh^3} \rho}{\eta} \quad (5.13)$$

In Tabelle 1) sind für charakteristische Stoff- und Verfahrensdaten der Hauptdruckverfahren die dimensionslosen Kenngrößen zusammengestellt.

	Rollenoffset		Bogenoffset		Tiefdruck		Flexodruck	
Durchmesser Formzylinder [m]	0,3		0,3		0,3		0,3	
Durchmesser Presseur [m]					0,15			
Durchmesser Gegendruckzyl.[m]	0,3		0,3				2	
Bahngeschwindigkeit [m/s]	8		3		12		9	
b [m/s ²]	853,33		120,00		2560,00		281,74	
η [Ns/m ² =Pas]	1		15		0,02		0,02	
ν [m ² /s]	0,001		0,015		0,00002		0,00002	
γ [mN/m]	30		30		30		30	
	großer Rasterpkt	kleiner Rasterpkt	großer Rasterpkt	kleiner Rasterpkt	großer Rasterpkt	kleiner Rasterpkt	großer Rasterpkt	kleiner Rasterpkt
R ₀ [μm]	500	15	500	15	100	30	500	30
h ₀ [μm]	5	3	5	3	20	10	15	6
Volumen [mm ³]	3,9E-03	2,1E-06	3,9E-03	2,1E-06	6,3E-04	2,8E-05	1,2E-02	1,7E-05
Charakteristische Länge L [mm]	0,158	0,013	0,158	0,013	0,086	0,030	0,228	0,026
1.) Mit U aus Gleichung 5.13								
U [m/s]	0,52	0,15	0,19	0,06	0,66	0,39	0,36	0,12
Re [-]	0,082	0,002	0,002	0,000	2,836	0,602	4,074	0,155
Fr [-]	1,7E+02	1,7E+02	2,4E+01	2,4E+01	5,2E+02	5,2E+02	5,7E+01	5,7E+01
We [-]	1,416	0,009	0,199	0,001	1,252	0,158	0,972	0,012
Ca [-]	17,30	4,94	97,29	27,76	0,44	0,26	0,24	0,08
2.) Mit U aus Gleichung 5.11								
U [m/s]	0,44	1,53	0,44	1,53	0,59	0,99	0,36	1,08
Re [-]	0,069	0,020	0,005	0,001	2,535	1,512	4,131	1,388
Fr [-]	1,2E+02	1,9E+04	1,2E+02	1,9E+04	4,2E+02	3,3E+03	5,9E+01	4,6E+03
We [-]	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Ca [-]	14,54	50,94	218,03	764,05	0,39	0,66	0,24	0,72

Tabelle 1) Charakteristische Stoff- und Verfahrensdaten der Hauptdruckverfahren

Bemerkungen zur Tabelle:

Zu den obigen Angaben über die Zähigkeit bei den Farbflüssigkeiten für den Flachdruck (Offsetdruck) muß angemerkt werden, daß es sich um mittlere, bei moderaten Scherraten mit herkömmlichen Rotationsviskosimetern gemessene η -Werte handelt, da bei diesen Flüssigkeiten in der Regel Nicht-Newtonsches Verhalten (Strukturviskosität, Viskoelastizität) vorliegt.

In der Aufstellung sind nur Walzenradien von Druckplattenzylindern, Presseuren etc. berücksichtigt, bei denen in der Regel die Farbspaltungsvorgänge der zweiten Klasse auftreten. Betrachtet man die Radien der Farbwerkswalzen in Rollenoffsetdruckmaschinen (reine Schichtspaltung), die um 0,04 m liegen, erhöhen sich die Reynoldszahlen rund um den Faktor 4.

Die Reynoldszahl ist für die Strömung die wichtigste Kennzahl, da sie angibt, ob bei Überwiegen der Trägheitskräfte mit Turbulenzen zu rechnen ist. Auf-

grund der stets sehr niedrigen Reynoldszahlen kann man jedoch schließen, daß die hier betrachtete Farbspaltung durch Plattenseparation in allen Fällen laminar bleibt.

Aus der Reynoldszahl läßt sich ferner ablesen, daß die Trägheitskräfte gegenüber den Reibungskräften beim Rollen- und Bogenoffsetdruck stets klein sind und nur bei den Druckverfahren mit niedrig viskosen Farben, und dann auch nur bei hinreichend großen Rasterpunkten, eine Rolle zu spielen beginnen. Auch gegenüber den aus den Oberflächenspannungen resultierenden Kräften sind die Trägheitskräfte gering, was aus den Weberzahlen abzulesen ist. Auch hier beginnt der Einfluß der Trägheitskräfte erst bei großen Rasterpunkten des Flexo- und Tiefdrucks.

Die Kapillarzahle belegt eindeutig, daß beim Flachdruck die Reibungskräfte in der Farbflüssigkeit der dominierende Faktor sind. Beim Flexo- und Tiefdruckverfahren liegen die viskosen Kräfte ungefähr in der gleichen Größenordnung wie die Oberflächenspannungskräfte.

Die relativ hohen Werte der Froudezahle geben an, daß, wie bereits im statischen Fall (s. Kap. 4.2), die Gravitation keine Rolle spielt und somit vernachlässigt werden kann.

Nachdem in den folgenden Kapiteln zunächst die allgemeinen Gleichungen zur Beschreibung der Farbspaltung aufgestellt werden, lassen sich dann gemäß den Werten der Kennzahlen naheliegende Vereinfachungen anwenden.

Zu erwähnen bleibt noch, daß bei den obigen Abschätzungen immer starres Walzenmaterial vorausgesetzt wurden, was in Druckmaschinen allerdings nicht der Fall ist. Dort gilt bei Walzenpaarungen immer der Grundsatz "hart" gegen "weich" (z.B. Stahl- gegen Elastomerwalze oder Gummizylinder gegen Druckformzylinder), so daß streng genommen die Verformung der Gegenwalze (durch ihre Nachgiebigkeit bedingt) mitberücksichtigt werden müßte, da sie dämpfend auf den Spaltungsvorgang wirkt. Daß solche Verformungen, die durch hohe Spaltungskräfte, insbesondere bei viskoelastischem Fließverhalten der Druckfarben, verursacht werden, vermutlich nicht unerheblich sind, beweist die Tatsache des "Rupfens" bei hohen Maschinengeschwindigkeiten. Beim Rupfen werden durch zu hohe "Zügigkeit" der Farbe z.B. bei der Farbübertragung vom Gummituch einer Offsetdruckmaschine zum Papier, Teile der Papieroberfläche regelrecht aus der Papierbahn herausgerissen, was Makulatur zur Folge hat.

5.2 Allgemeine Voraussetzungen für die Rechnung

Für die hydrodynamischen Vorgänge bei der Farbspaltung müssen die Gesetze der Strömungslehre angewandt werden, für die folgende Vereinbarungen getroffen werden:

- Der Spaltungsvorgang verläuft isotherm.
- Wie im statischen Fall sei eine rotationssymmetrische Geometrie vorausgesetzt, die am besten von Zylinderkoordinaten r , φ und z beschrieben wird.
- Wenn im folgenden neben der symbolischen Vektorschreibweise die indexorientierte Schreibweise benutzt wird, gilt die Summationskonvention, d.h. sobald in einer Gleichung innerhalb eines Produktes oder eines Quotienten die gleichen Indizes doppelt vorkommen, muß eine Summation über diesen Index ausgeführt werden (s. dazu /30/).

An jeder Stelle innerhalb des Flüssigkeitstropfens wird ein Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} definiert. Für die Rechnung zerlegt man den Geschwindigkeitsvektor in seine Komponenten u in radialer Richtung, v in φ -Richtung und w in z -Richtung. Durch die Voraussetzung der Rotationssymmetrie verschwindet die Geschwindigkeitskomponente v . Es gilt also:

$$u = u(r, z, t) \quad (5.14)$$

$$w = w(r, z, t) \quad (5.15)$$

Bewegt man die obere Platte mit der Geschwindigkeit $w(z=h)=w_h=w_h(t)$, ist der Druck p innerhalb des Tropfens nicht mehr konstant, sondern es entsteht ein zeitabhängiges Druckfeld:

$$p = p(r, z, t) \quad (5.16)$$

Um die Bezeichnungen aus Kap. 3 bzw. 4 beizubehalten, ist unter dem Druck p_i nun der Druck im Innern des Tropfens, aber nur direkt unterhalb der freien Oberfläche zu verstehen. Bei $z=0$ und $r=0$ herrsche der Druck p_0 .

Unabhängig von den Materialeigenschaften der Flüssigkeit (Newtonsche - Nicht-Newtonsche) gilt unter der allgemeinen Voraussetzung der Inkompressibilität die Kontinuitätsgleichung in der differentiellen Form:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \quad (5.17)$$

Das Problem, die Farbspaltung in hydrodynamischer Sicht zu behandeln, besteht nun darin, ein System von partiellen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung von zeitabhängigen Randbedingungen zu lösen. Im einzelnen sind dies:

Kontinuitätsgleichung
 Bewegungsgleichung
 Materialgesetz
 dynamische und kinematische Randbedingungen

5.3 Randbedingungen an den Platten und der freien Oberfläche

Da die Randbedingungen unabhängig von der Art der Bewegungsgleichung und dem Materialgesetz sind, sollen sie zunächst betrachtet werden.

5.3.1 Dynamische Randbedingung

An der Berandungskurve $R=R(z)$, an der zwei Fluide (jeweils durch unterschiedliche Indizierung gekennzeichnet) aneinandergrenzen, muß die dynamische Randbedingung erfüllt werden, d.h. der Spannungsvektor in der Flüssigkeit (Liquid) \mathbf{t}_L muß mit dem Spannungsvektor in der Luft \mathbf{t}_a , der ohne Berücksichtigung der Luftreibung nur aus dem Außendruck p_a entsteht, und den Oberflächenkräften \mathbf{t}_γ im Gleichgewicht stehen (Vektoren und Matrizen werden durch Fettdruck gekennzeichnet). Es muß also an der freien Oberfläche gelten:

$$\mathbf{t}_a + \mathbf{t}_L + \mathbf{t}_\gamma = 0 \quad (5.18)$$

Ist \mathbf{n} der auf der Oberfläche nach außen gerichtete Normalenvektor, läßt sich unter der Voraussetzung konstanter Oberflächenspannung γ_L schreiben:

$$\mathbf{t}_\gamma = \mathbf{n} \gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.19)$$

mit den aus Kap. 4.1 bekannten, nun orts- und zeitabhängigen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 . Es ist die allgemeine Komponente des Spannungsvektors:

$$t_i = \tau_{ij} n_j \quad (5.20)$$

Dabei ist τ_{ij} der Spannungstensor des entsprechenden Fluids, der in der Schreibweise nach /30/ sowohl die Druck- als auch (falls vorhanden) die Reibungsanteile enthält. Unter der Annahme, daß die Umgebungsluft keine Schubspannungen übertragen kann, ist der Spannungstensor der Luft daher:

$$\tau_{a\,ij} = -p_a \delta_{ij} \quad (5.21)$$

Wegen der unterschiedlichen Orientierung ist:

$$\mathbf{n}_a = -\mathbf{n}_L \quad (5.22)$$

Ohne den Spannungstensor der Flüssigkeit weiterhin durch den Index L zu kennzeichnen, heißt die allgemeine dynamische Randbedingung an der freien Oberfläche zur Umgebungsluft:

$$\tau_{ji}n_j + \left[p_a - \gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = 0 \quad (5.23)$$

Dies sind eigentlich drei Gleichungen, sie reduzieren sich im vorliegenden Problem aber auf zwei, da der Normalenvektor keine Komponente in φ -Richtung hat, $n_\varphi = 0$. Ausgeschrieben lauten sie:

$$\tau_{rr}n_r + \tau_{rz}n_z + \left[p_a - \gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_r = 0 \quad (5.24)$$

$$\tau_{rz}n_r + \tau_{zz}n_z + \left[p_a - \gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_z = 0 \quad (5.25)$$

Verwendet man die Abkürzung

$$p_a - \gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_{\text{ared}} \quad (5.26)$$

und zerlegt den Spannungstensor τ_{ij} in den Druckanteil und den Reibungsspannungstensor μ_{ij} ,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_{ij} \quad (5.27)$$

lassen sich die dynamischen Randbedingungen (p_i =Randdruck) schreiben:

$$\mu_{rr} - p_i + p_{\text{ared}} + \mu_{rz} \frac{n_z}{n_r} = 0 \quad (5.28)$$

$$\mu_{rz} \frac{n_r}{n_z} + \mu_{zz} - p_i + p_{\text{ared}} = 0 \quad (5.29)$$

Die Komponenten des Normalenvektors \mathbf{n} für kartesische Koordinaten wurden bereits in Gleichung (4.57) angegeben. In Zylinderkoordinaten lautet \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -R' \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Damit ergibt sich für die Komponenten des Spannungstensors entlang der freien Oberfläche:

$$\mu_{rr} - p_i + p_a - \gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \mu_{rz} R' = 0 \quad (5.31)$$

$$\mu_{zz} - p_i + p_a - \gamma_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \mu_{rz} \frac{1}{R'} = 0 \quad (5.32)$$

Sind die Komponenten des Reibungsspannungstensors μ_{ij} gleich Null oder vernachlässigbar klein, reduzieren sich die Gleichungen (5.28) und (5.29) bzw. (5.31) und (5.32) zu einer einzigen, die der Bedingung (4.11) des stati-

schen Falls entspricht, lediglich der Druck $p (= p_i)$ muß entlang der Berandung $R(z)$, also $p(R,z,t)$ genommen werden.

5.3.2 Kinematische Randbedingungen

An einer freien Oberfläche gilt neben der dynamischen noch die kinematische Randbedingung, daß die Normalkomponente des Geschwindigkeitsfeldvektors gleich der Normalkomponente der Konturänderungsgeschwindigkeit sein muß:

$$u_i n_i = u_i^{\text{kontur}} n_i \quad (5.33)$$

Nach /30/ kann Bedingung (5.33) unter Verwendung der impliziten Form einer Oberfläche, welche $F(r,z,t)=0$ lautet, geschrieben werden als:

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad (5.34)$$

Dabei ist mit dem Operator D/Dt die sog. substantielle Ableitung nach der Zeit gemeint.

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} F \quad (5.35)$$

Auf den vorliegenden Fall angewandt, folgt aus der in Anlehnung an die vorigen Kapitel bekannten speziellen expliziten Form $r = R(z,t)$ der Konturfläche die implizite Form

$$-r + R(z,t) = 0 \quad (5.36)$$

und dadurch aus (5.36) mit (5.35):

$$\frac{\partial R}{\partial t} - u + w \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{R} - u + w R' = 0 \quad (5.37)$$

Durch den Punkt ist die partielle Ableitung nach der Zeit gekennzeichnet. Die Behandlung der Bedingung (5.37) in Kombination mit (5.31) und (5.32) bereitet im allgemeinen große Schwierigkeiten.

Es sollen weiterhin unabhängig von der Art der Flüssigkeit folgende Randbedingungen gelten:

1) Rotationssymmetrie:

$$u(r=0) = 0 \quad (5.38)$$

2) Starre, ebene Wände, die sich bewegen, aber natürlich nicht durchströmt werden können. In der Druckmaschine läuft der Farbspaltungsvorgang in der Regel als beschleunigte Bewegung nach Art der Gleichungen (5.4) bis (5.6) ab. Für die hier aufgezeigten Modellrechnungen soll der Vor-

gang daher in erster Näherung durch eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung b angenommen werden. Es ist dann:

$$w_h = \sqrt{2b(h - h_0)} \quad \text{mit} \quad b = \text{const.} \quad \text{und} \quad h_0 = h(t=0) \quad (5.39)$$

In besonders gekennzeichneten Fällen wird auch mit $w_h = \text{const.}$ gerechnet.

Für die Plattenbewegung sollen zwei verschiedene Fälle möglich sein:

- a) Nur die obere Platte bewegt sich mit w_h , während die untere Platte ortsfest bleibt (asymmetrischer Fall). Dafür gilt:

$$w(z=0) = 0 \quad (5.40)$$

$$w(z=h) = w_h \quad (5.41)$$

- b) Sowohl die untere als auch die obere Platte bewegen sich (symmetrischer Fall). Sie sollen die gleiche Geschwindigkeit haben, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Aus Gründen der Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit dem ersten Fall sei sie zu $w_h/2$ gewählt, und der Koordinatenursprung in der Mitte zwischen den Platten. Somit:

$$w(z = -\frac{h}{2}) = -\frac{w_h}{2} \quad (5.42)$$

$$w(z = \frac{h}{2}) = \frac{w_h}{2} \quad (5.43)$$

- 3) Haftbedingung, d. h. keine Tangentialgeschwindigkeit direkt an den Platten:

$$u(z=0) = 0 \quad (5.44)$$

$$u(z=h) = 0 \quad (5.45)$$

All diese Randbedingungen müssen von den Geschwindigkeitsfeldern $u(r,z,t)$ und $w(r,z,t)$ eingehalten werden. Besondere Bedeutung kommt aber wieder, wie schon in Kap. 4.11 eingehend diskutiert, der dynamischen Kontaktstelle an den Dreiphasengrenzen zu, da die dort herrschenden Bedingungen maßgeblich für die Konturkurve der freien Oberfläche sind.

5.3.3 Bedingungen an der Dreiphasenkontaktstelle

Die wesentlichen Randbedingungen der freien Oberfläche, Gleichungen (5.31), (5.32) und (5.37), sind keine algebraischen Gleichungen, sondern enthalten ihrerseits wiederum Differentialausdrücke. Gleichungen (5.31) und (5.32) wären, falls die Schubspannungen als Funktion des Geschwindigkeitsfeldes bekannt wären, als gewöhnliche, nichtlineare DGLn 2. Ordnung in $R(z)$ aufzufassen. Gleichung (5.37) wäre dann, da die zeitliche Veränderung des Ortes der Oberfläche eingeht, eine partielle DGL 1. Ordnung in $R(z,t)$. Bei der

Lösung dieser DGLn würden wieder neue unbekannte Integrationskonstanten auftreten, die durch weitere Bedingungen festgelegt werden müssen (z.B. von der Form $R(z=0,t)=R_0(1-\exp(kt))$ mit $R(z,t=0)=R_0=\text{const.}$).

Vom Typ der Gleichungen sieht man, daß diese weiteren Bedingungen im Prinzip mit den bereits für den "statischen" Fall in Kap. 4.7 diskutierten Randbedingungen identisch sind, nur können sie zusätzlich noch von der Zeit abhängen. An einer Dreiphasenkontaktstelle kann also wiederum zu einer Zeit nur entweder der Grundradius oder der Randwinkel vorgegeben werden.

Der Fall der während des gesamten Spaltungsvorgangs konstanten Grundradien, wie z.B. bei den Rasterpunkten des Hochdrucks vorkommend, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Ist dagegen die Oberfläche glatt und ohne grenzflächenphysikalische "Kanten", kann sich die Dreiphasenkontaktstelle verschieben, und "dynamische" Randwinkel treten auf.

Das aus Messungen bekannte qualitative Verhalten des dynamischen Randwinkels in Abhängigkeit von der Bewegungsgeschwindigkeit der Dreiphasenkontaktlinie, inclusive der Randwinkelhysterese, gibt Davis /16/ in einem Diagramm wieder, welches hier in Abb. 5.2 dargestellt und unter Verwendung der präzisierenden Angaben von Huh und Scriven /17/ verfeinert wurde.

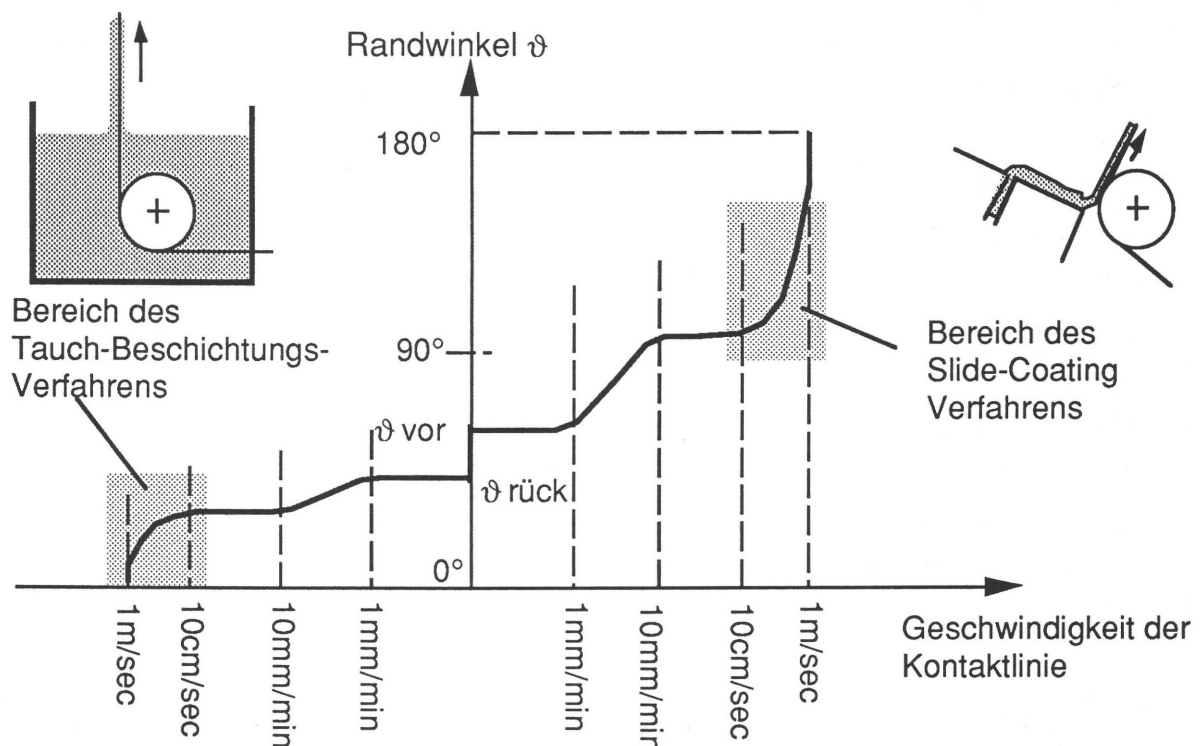


Abb. 5.2 Dynamischer Randwinkel in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit der Kontaktlinie

Die Problematik der dynamischen Kontaktwinkel spielt insbesondere bei den Beschichtungsverfahren (s. kleine Beispielskizzen in Abb. 5.2) eine große Rolle. Im Gegensatz zum Farbspaltungsvorgang, bei dem sich die Berandungen (nach dem Koordinatensystem aus Abb. 3.2) in z-Richtung bewegen, treten bei den Beschichtungsverfahren eher nur Bewegungen des zu beschichtenden Materials in r-Richtung auf.

Die einfachste Anwendung ist, wie auch in Abb. 5.2 eingezeichnet, das Tauchbeschichtungsverfahren, bei dem eine Materialbahn mit konstanter Geschwindigkeit aus einem Flüssigkeitsbad gezogen wird. Ab einer gewissen Geschwindigkeit verschwindet der Randwinkel und es entsteht ein geschlossener Flüssigkeitsfilm auf der Bahn. Wie groß in etwa die Schichtdicke des Flüssigkeitsfilms auf dem aus dem Bad gezogenen Festkörper ist, wurde wegen der technischen Anwendung dieses Effekts, der Herstellung von fotografischen Filmen, oft untersucht. Die Schichtdicken hängen im wesentlichen nicht von den grenzflächenphysikalischen Eigenschaften der beteiligten Materialien ab, sondern sind nach grundlegenden theoretischen Arbeiten von Landau und Levich /31/ oder Deryagin und Levi /32/ hauptsächlich Funktionen des Produkts aus Viskosität und der Auszugsgeschwindigkeit. Die Größenordnung der Schichtdicken liegt für die dort benutzten Geschwindigkeiten von $< 1\text{ m/s}$ um 100 Mikrometer.

Im Bereich kleiner Auszugsgeschwindigkeiten (um 10 mm/min s. Abb. 5.2) gelingt es Zimmermann /33/ eine Relation zwischen den die Strömung beschreibenden Kenngrößen, Gleichungen (5.7) bis (5.10) und dem "dynamischen" Randwinkel herzustellen.

Zimmermann untersuchte den Randwinkel, der sich an einem aus einem Flüssigkeitsbad senkrecht herausfahrenden Zylinder in Abhängigkeit der Geschwindigkeit u_0 ergibt. Der in /33/ durch eine Regressionsanalyse (mit sehr guter Korrelation) gefundene Zusammenhang zwischen dem durch Anlegen einer Tangente aus Fotografien ausgemessenen dynamischen Rückzugs-Randwinkel ϑ und den in dimensionslosen Kenngrößen zusammengefaßten Einflußfaktoren lautet:

$$\vartheta = f(\text{Ca}, \text{Fr}, \text{We}, \text{Re}) = k \cdot \text{Ca}^{-0,81} \text{Fr}^{0,5} \text{M}^{0,23} \quad \text{mit} \quad \text{M} = \frac{\text{We}^3}{\text{Re}^4 \text{Fr}^2} = \frac{g \eta^4}{\rho \gamma_L^3} \quad (5.46)$$

Die Zusammenfassung dreier Kennzahlen in (5.46) zu einer neuen Kennzahl, der Beschleunigungszahl oder Mortonzahl M , ist nach /22/ bei strömungstechnischen Problemen wie das der Rieselfilme und dem Zerstäuben von Flüssig-

keiten gebräuchlich. Als charakteristische Länge L wählte Zimmermann die Kapillarrhöhe des statischen Meniskus über dem Flüssigkeitsspiegel.

Von den sechs in Betracht gezogenen Einflußgrößen u_0 , η , ρ , L , γ_L und g gehen u_0 , ρ und L ungefähr zu gleichen Potenzen um $-0,25$ in die empirische Bestimmungsgleichung (5.46) für den Randwinkel ein. Die Potenzen für γ_L und η liegen bei $0,11$ und kennzeichnen einen geringeren Einfluß. Die Erdbeschleunigung g liefert mit einer Potenz von $0,04$ erwartungsgemäß nur einen verschwindenden Beitrag (vgl. Kap 4.2). Daß bei dieser Betrachtung von vornherein die Einflüsse des Festkörpermaterials weggelassen wurden, da sie offenbar keine Rolle spielen, läßt sich damit erklären, daß sich ein hauchdünner Film ausbildet, der mit einfachen optischen Methoden nicht zu beobachten ist, aber wesentlich dicker ist, als die Reichweite der intermolekularen Kräfte direkt an der Festkörperoberfläche.

Daß der Einfluß der grenzflächenphysikalischen Eigenschaften des Festkörpermaterials auf den makroskopischen, "dynamischen" Rückzugsrandwinkel tatsächlich unerheblich ist, legen auch die eigenen Messungen nahe, z.B. nach Abb. 4.28 b), bei denen die Rückzugsrandwinkel von Glyzerin auf Stahl oder Teflon nahezu identisch sind.

Eine entgegengesetzte Geometrie, bei der eine Materialbahn in ein Flüssigkeitsbad eingefahren wird (auch "plunging tape" genannt), verwenden Joos u.a. /34/, um damit den dynamischen Vorrückwinkel zu messen. Im Gegensatz zu /33/ stellen Joos und seine Mitarbeiter anhand von Messungen mit Newtonschen Fluiden fest, daß der dynamische Randwinkel der bestechend einfachen Beziehung (5.47) folgt. Die Korrelation zwischen Formel und Messungen ist sehr gut.

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - 2(1 + \cos\vartheta_0) \sqrt{\frac{\eta u_0}{\gamma_L}} \quad (5.47)$$

Neben dem statischen Randwinkel ϑ_0 ist hier der wesentliche, den Randwinkel beeinflussende Parameter die Wurzel aus der Kapillarzahl.

Bei weiterer Erhöhung der Bahngeschwindigkeit tritt der Effekt des "Air-Entrainments" des Einschleppens eines dünnen, instabilen Luftfilms zwischen Materialbahn und Flüssigkeit auf. Dieser Effekt bestimmt die maximale beim Slide-Coating-Verfahren (s. Abb. 5.2) mit Newtonschen Flüssigkeiten erreichbare Beschichtungsgeschwindigkeit.

Geschwindigkeitsmessungen mit einem Laser-Doppler-Anemometer von Hens und Mues /35/ im Bereich des dynamischen Kontaktwinkels des Slide-

Coating-Verfahrens zeigen, daß selbst bei Geschwindigkeiten unterhalb des Air-Entrainments ein ca. $50\mu\text{m}$ langer Bereich existiert, bei dem die Flüssigkeit noch nicht die volle Geschwindigkeit der Materialbahn erreicht hat und somit eine "Gleitzone" vorhanden sein muß, in der noch das umgebende Gas mitgeschleppt wird und erst allmählich durch die Flüssigkeit verdrängt wird. Huh und Scriven /17/ weisen in diesem Zusammenhang bei Ihren Rechnungen darauf hin, daß selbst sehr kleine Viskositäten (also die Gasphase) im Bereich der Dreiphasenkontaktlinie eine große Rolle spielen können.

Mit ihren Ergebnissen liefern Hens u. Mues /35/ nachträglich eine Erklärung und Rechtfertigung für die 1977 von Hocking /36/ aufgestellte Forderung, in der Nähe der Kontaktlinie die Haftbedingung aufzugeben und durch eine sog. Slipbedingung zu ersetzen. D. h., daß in Abhängigkeit der Randschubspannung ein Gleiten der Flüssigkeits-Gas-Phasengrenze entlang der Festkörperoberfläche zugelassen wird, womit die Singularitäten in der Ecke der Dreiphasenkontaktlinie vermieden werden können. Der Randwinkel wird dabei als konstant angenommen, womit dies nach den Ergebnissen von /33/ oder /34/ nur eine Näherung der wahren Verhältnisse bleibt. Die Slipbedingung scheint aber in Ermangelung eines besseren physikalischen, evtl. molekulartheoretischen Modells das vielversprechendste Verfahren zur Beschreibung der Verhältnisse an der Dreiphasengrenze zu sein.

Die später in Kap. 5.7 beschriebene numerische Behandlung des Farbspaltungsproblems benutzt u.a. eben die Slipbedingung (näheres dazu auch dort beschrieben) und muß in diesem Punkt daher als nicht vollständig exakt angesehen werden.

Im folgenden werden zunächst unter bestimmten Voraussetzungen und drucktechnisch begründeten Vereinfachungen analytische Lösungen aufgezeigt und diskutiert.

5.4 Vereinfachungen für Newtonsche Flüssigkeiten

Zur Lösung eines strömungstechnischen Problems ist es nicht nur notwendig, ein Geschwindigkeitsfeld zu finden, das der Kontinuitätsgleichung (5.19) mit den kinematischen Randbedingungen genügt, sondern auch die Druckverteilung und die aus der Bewegung resultierenden Spannungen müssen das Materialgesetz und die Bewegungsgleichung(en) unter Berücksichtigung der dynamischen Randbedingung(en) erfüllen. Das einfachste Materialgesetz,

das eine Verknüpfung zwischen den Bewegungsgrößen, dem Druck und den reibungsinduzierten Schubspannungen herstellt, gilt für die sog. Newtonschen Flüssigkeiten. Es lautet:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (5.48)$$

Da, wie in Kap. 3 und bei den Bemerkungen zu Tabelle 1 bereits erwähnt, die pastösen Druckfarben für den Offset- und herkömmlichen Hochdruck (Buchdruck) in der Regel aber kompliziertes Nicht-Newtonsches Verhalten zeigen, soll die Rechnung unter Annahme des Newtonschen Materialgesetzes für diese beiden Druckverfahren nur eine erste, grobe Näherung sein. Die Druckfarben des Tief- und Flexodrucks hingegen zeigen bis hin zu den Scherraten, die in handelsüblichen Rotationsviskosimetern erreichbar sind, tatsächlich Newtonsches Verhalten.

Die nachfolgenden Rechnungen beschreiben daher in erster Linie die Farbspaltungsvorgänge beim Tief- und Flexodruck. In der Schreibweise nach /30/ enthält der Spannungstensor τ sowohl die reinen Druckanteile (δ ist die Einheitsmatrix) als auch die Schubspannungsanteile, die durch den Deformationsgeschwindigkeitstensor e bestimmt werden. In rotationssymmetrischen Zylinderkoordinaten lautet er:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} u_r & 0 & \frac{1}{2}(u_z + w_r) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}(u_z + w_r) & 0 & w_z \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Die Indizes z und r kennzeichnen von hier an die partiellen Richtungsableitungen der Geschwindigkeitskomponenten u und w . Diese einfache Schreibweise wird nur bei den Geschwindigkeitsableitungen benutzt.

Setzt man dies in die differentielle Form des allgemeinen Impulssatzes für Kontinua, der sog. Cauchyschen Bewegungsgleichung (5.50) (hier wegen Kap. 4.2 unter Vernachlässigung der Volumenkräfte, die aus der Gravitation oder aus den von der Rotation der Druckwalzen herrührenden Fliehkräften bestehen können)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \text{grad} \mathbf{u} = \nabla \tau \quad (5.50)$$

ein, erhält man die als Navier-Stokesschen Gleichungen bekannten Differentialgleichungen. Der Plural wurde deswegen gebraucht, weil man sie in der

Regel komponentenweise aufschreibt. Der Operator ∇ bedeutet hier die Divergenz des Spannungstensors τ . Im vorliegenden ebenen, rotationssymmetrischen Problem lauten die Navier-Stokesschen Gleichungen in r-Richtung ausgeschrieben (Index t steht für die Zeitableitung):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} - \frac{1}{r^2}u) - \rho(u_t + uu_r + ww_z) \quad (5.51)$$

und in z-Richtung:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + w_{zz}) - \rho(w_t + uw_r + ww_z) \quad (5.52)$$

Die geschlossene, analytische Lösung des vollständigen Problems aus den Gleichungen (5.51), (5.52), (5.17) insbesondere unter Berücksichtigung der freien Oberfläche mit ihrer zeitabhängigen Lage (5.31), (5.32) und (5.37) und unter Berücksichtigung der Randbedingungen (5.38), (5.40), (5.41), (5.44) und (5.45) erscheint nicht möglich. Unter gewissen Vereinfachungen sind jedoch durchaus interessante Teillösungen zu finden, die in den nächsten Kapiteln vorgestellt werden, bevor am Ende eine rein numerische Lösung aufgezeigt wird.

5.5 Stefansche Lösung

Die einfachste der analytischen Teillösungen wurde bereits 1874 von Stefan /4/ vorgestellt. Das Problem, mit dem sich Stefan beschäftigte, war die Frage nach der Kraft-Zeit-Relation für das Abheben der oberen zweier paralleler, vollständig in Flüssigkeit eingetauchter Platten nach der Skizze Abb. 5.3.

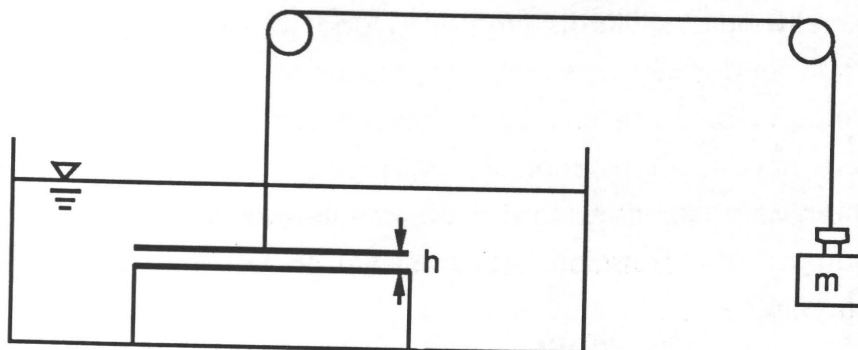


Abb. 5.3 Prinzipskizze des Stefanschen Problems

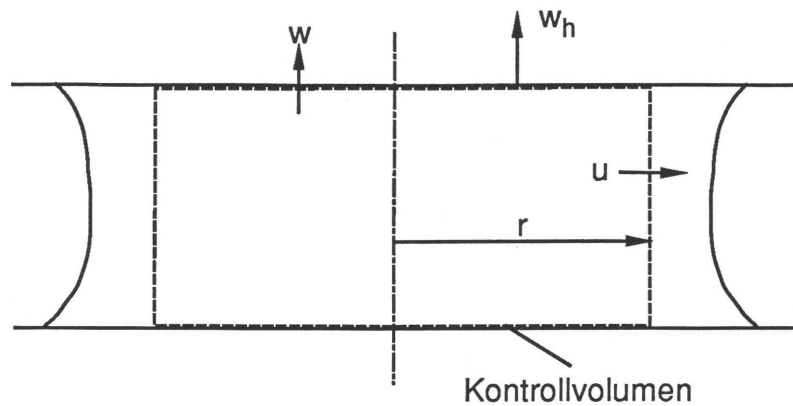


Abb. 5.4 Kontrollvolumen zur Herleitung der Stefanschen Kontinuitätsüberlegung

Für seine Berechnungen geht er von einer Kontinuitätsüberlegung nach Abb. 5.4 aus, die man unter Verwendung der (inkompressiblen) Kontinuitätsgleichung in der integralen Form

$$\iint_A \rho u_i n_i dA = 0 \quad (5.53)$$

mit dem auf der Oberfläche A des geschlossenen Kontrollvolumens senkrecht stehenden Normalenvektor \mathbf{n} schreiben kann:

$$\pi r^2 w_h + 2 \pi r \int_0^h u(r, z) dz = 0 \quad (5.54)$$

Gleichung (5.54) ist beim Stefanschen Problem wegen der in r-Richtung quasi unendlich ausgedehnten Platten immer gültig, im Falle des sich einschnürenden Tropfens natürlich nur solange $r < R_{\min}$ ist (mit R_{\min} wird nach Kap. 4 der Minimalradius der Tropfenkontur bezeichnet).

Damit (5.54) erfüllt werden kann, macht Stefan für die Radialgeschwindigkeitskomponente u einen Ansatz, der linear in r und, an eine ausgebildete Spaltströmung erinnernd, parabolisch in z ist. Er erhält:

$$u = -3 w_h \frac{r}{h} \left[\left(\frac{z}{h} \right) - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (5.55)$$

und hieraus mit der Kontinuitätsbedingung Gleichung (5.17):

$$w = 3 w_h \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \quad (5.56)$$

Verwendet man zur Entdimensionierung die Schreibweise:

$$u^* = \frac{u}{w_h} \quad ; \quad w^* = \frac{w}{w_h} \quad ; \quad r^* = \frac{r}{h} \quad \text{und} \quad z^* = \frac{z}{h} = \zeta \quad (5.57)$$

(beachte: im Vergleich zum statischen Fall aus Kap. 4 ist $r^* \neq \xi$ aber $z^* = \zeta$) erhält man:

$$u^* = -3 r^* (z^* - z^{*2}) \quad (5.58)$$

$$w^* = 3 z^{*2} - 2 z^{*3} \quad (5.59)$$

Um zu prüfen, ob diese Geschwindigkeitsfelder die Navier-Stokesschen Gleichungen (5.51) und (5.52) erfüllen, eliminiert man zweckmäßigerweise aus (5.51) und (5.52) den Druck mit der Bedingung:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} \quad (5.60)$$

Es bleibt

$$\begin{aligned} & \eta \left(u_{rrz} + \frac{1}{r} u_{rz} + u_{zzz} - \frac{1}{r^2} u_z - w_{rrr} - \frac{1}{r} w_{rr} + \frac{1}{r^2} w_r - w_{zzr} \right) \\ & = \rho (u_{tz} + u_z u_r + u u_{rz} + w_z u_r + w u_{zz} - w_{tr} - u_r w_r - u w_{rr} - w_r w_z - w w_{rz}) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Berücksichtigt man weiterhin, daß bei den Stefanschen Geschwindigkeitsfeldern $u(r,z) = r \cdot g(z)$ $w \neq w(r)$ und wegen dem Polynom zweiten Grades in z $g''' = 0$ ist, verschwindet der η -Term in Gleichung (5.61), während auf der rechten Seite die beiden Terme u_{tz} und $w u_{zz}$ stehen bleiben. Damit erfüllen die Stefanschen Geschwindigkeitsfelder lediglich die auf die Stokesschen Gleichungen reduzierten Navier-Stokesschen Gleichungen (5.51) und (5.52) für die sog. schleichende Strömung. Die Trägheitsterme bleiben unberücksichtigt.

Wie das Stefansche Geschwindigkeitsfeld vektoriell aufgetragen aussieht, kann man Abb. 5.5 entnehmen.

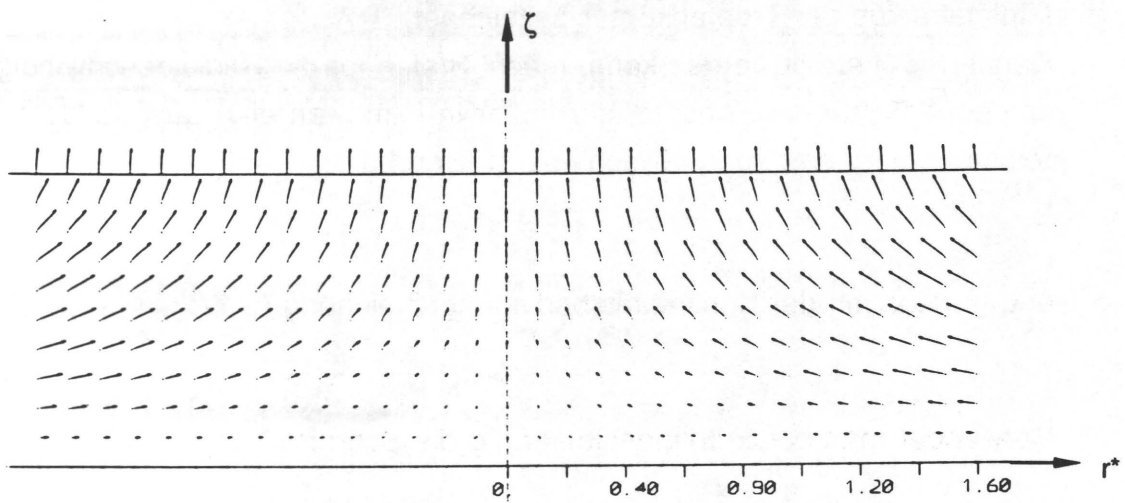


Abb. 5.5 Geschwindigkeitsfeld nach Stefan

Die zugehörige Druckverteilung, die von Stefan nicht angegeben wird, läßt sich aus der partiellen Integration der vereinfachten Navier-Stokesschen Gleichungen gewinnen:

$$p(r,z) = 6 \frac{\eta w_h}{h^3} \left[\frac{r^2}{2} + (hz - z^2) \right] + p_0 = 6 \frac{\eta w_h}{h} \left[\frac{1}{2} r^{*2} + z^* - z^{*2} \right] + p_0 \quad (5.62)$$

Die Integrationskonstante p_0 verkörpert hier den Druck bei $r=z=0$ (bzw. $r^*=z^*=0$). In Abb. 5.6 sind die sich ergebenden Isobaren in dimensionsloser Darstellung aufgetragen.

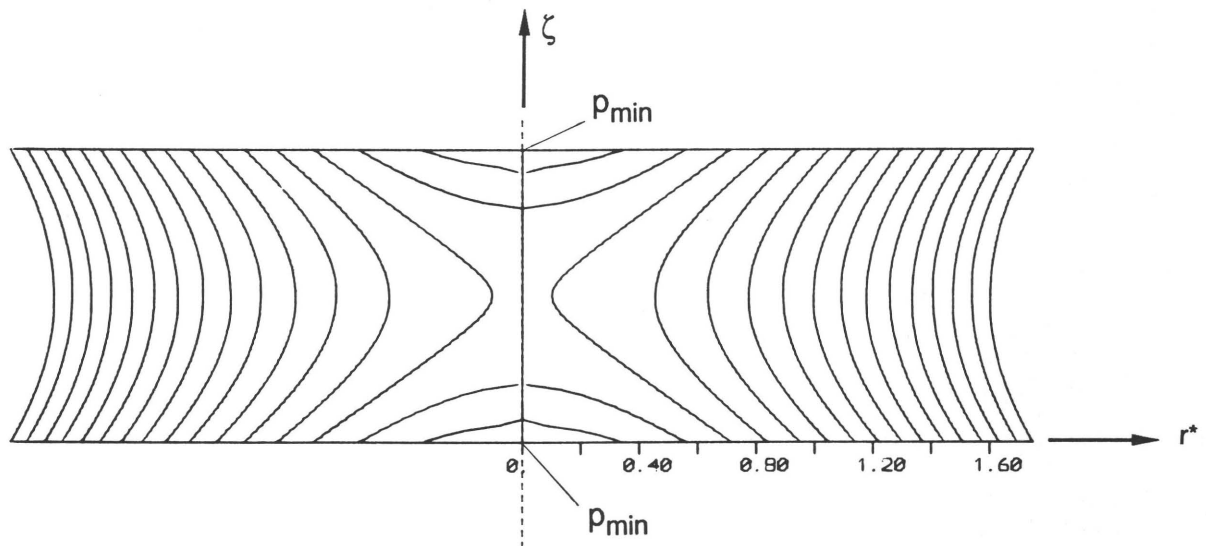


Abb. 5.6 Isobaren der Stefanschen Lösung

Nach den Stefanschen Überlegungen kann auch das Geschwindigkeitsfeld unter Berücksichtigung der symmetrischen Randbedingungen (5.42), (5.43), angegeben werden. Man erhält:

$$u^* = -\frac{3}{4} r^* (1 - 4 z^{*2}) \quad (5.63)$$

$$w^* = \frac{3}{2} z^* - 2 z^{*3} \quad (5.64)$$

Die zugehörigen Geschwindigkeitsvektorplots und die Verteilung der Isobaren des Druckfeldes

$$p = 3 \frac{\eta w_h}{h} (r^{*2} - z^{*2}) \quad (5.65)$$

zeigen Abb. 5.7 bzw. Abb. 5.8.

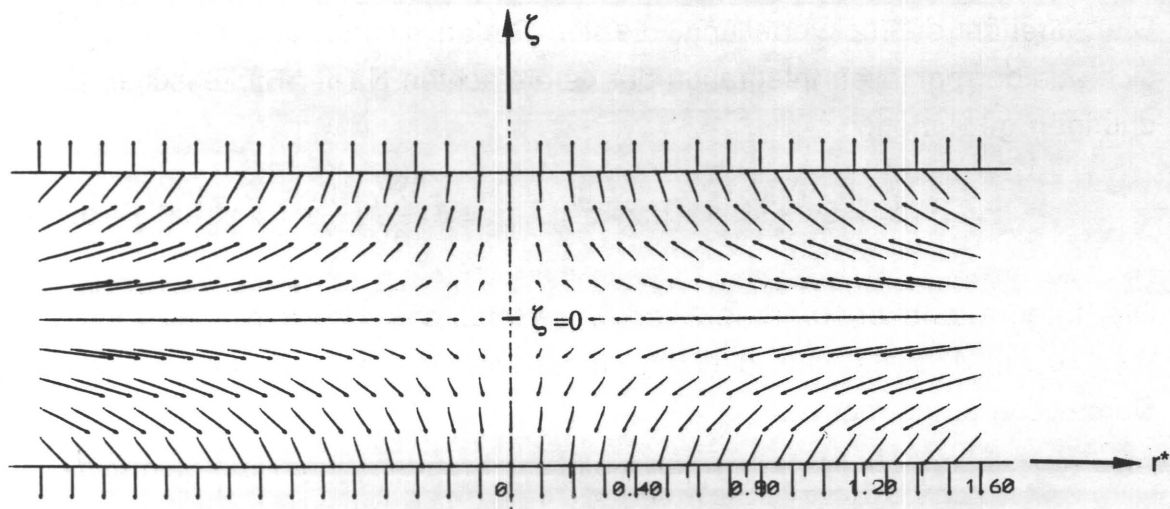


Abb. 5.7 Geschwindigkeitsfeld mit symmetrisch bewegten Platten

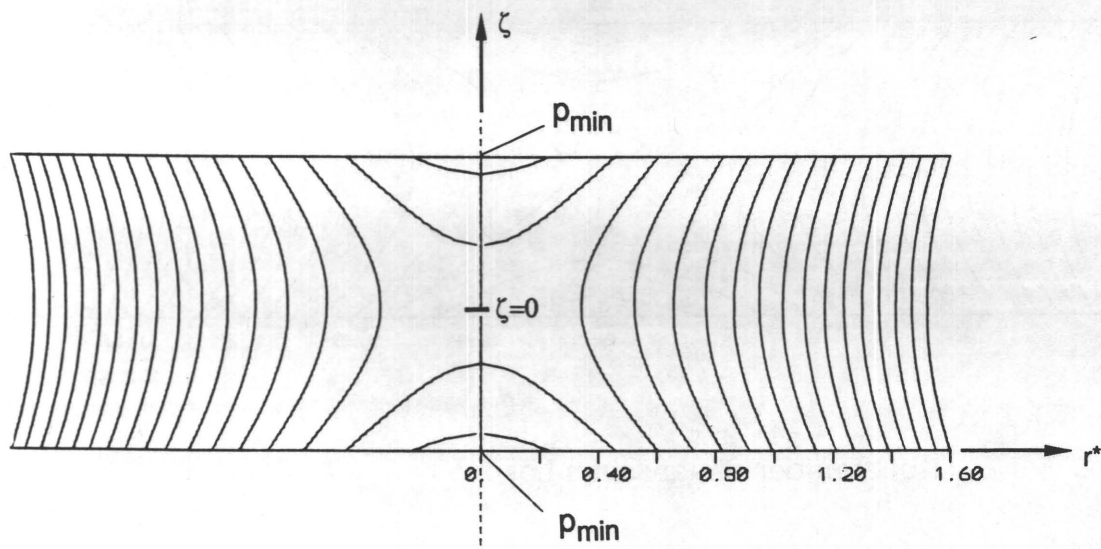


Abb. 5.8 Isobarenfeld mit symmetrisch bewegten Platten

Wie man anhand der Gleichungen (5.62) bzw. (5.64) oder in Abb. 5.6 bzw. 5.8 leicht sieht, ist der Druck in der Mittelachse jeweils an den Plattenoberflächen am geringsten. Damit der Druck p_0 nicht negativ wird, was zu spontanen Kavitationserscheinungen führen würde, muß im asymmetrischen Fall beispielsweise in der $z^*=0$ -Ebene sein:

$$p(r^*) - 3 \frac{\eta w_h}{h} r^{*2} \geq p_0 \geq 0 \quad (5.66)$$

Zahlenbeispiel:

Ist an einer bestimmten Stelle r^* , an der die freie Oberfläche angesiedelt ist, der Druck ungefähr 10^5 Pa (\approx Umgebungsdruck), dürfte für offsettypische

Werte, $\eta=10$ Pas, $w_h=0,1$ m/s und $h=10^{-5}$ m, r^* nicht größer als 30 sein, damit keine Kavitation auftritt (d.h. bei Rasterpunkten deren Grundradius dreißigfach größer ist als ihre Höhe zwischen den Platten wäre Kavitation wahrscheinlich). Wie bereits in Kap. 2 besprochen, wird die von Stefan angegebene Näherungsformel (2.1) für die Trennzeit der Platten oft fälschlicherweise als Kraft-Zeit-Verlauf interpretiert. Stefan selbst weist auf eine große Abweichung seiner Meßergebnisse von dem mit (2.1) vorausgesagten Trennverhalten hin. Er versucht dies dadurch zu kompensieren, daß er die Haftbedingung an den Platten aufgibt und dort fälschlicherweise Tangentialgeschwindigkeiten zuläßt. Den tatsächlichen Spaltkraftverlauf $F(t)$ erhält man jedoch sehr einfach aus der Integration über die Plattenfläche mit

$$F(z=0) = \int_{A_0} p dA_0 = 6\pi \frac{\eta w_h}{h^3} \int_0^{R_0} r^3 dr = \frac{3}{2} \pi \frac{\eta w_h}{h^3} R_0^4 \quad (5.67)$$

Abb. 5.9 zeigt den gerechneten Verlauf der Kraft F über der Zeit nach Gleichung (5.67) bei konstanter Beschleunigung b für ein Zahlenbeispiel.

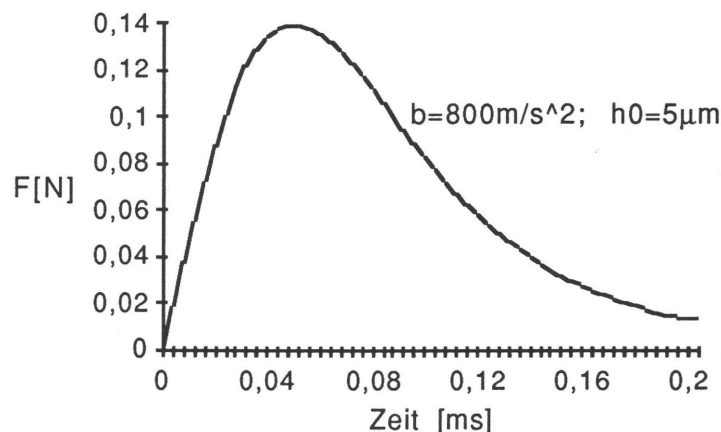


Abb. 5.9 Kraftverlauf nach Stefan bei konstanter Trennbeschleunigung

Bei konstanter Trennbeschleunigung lassen sich auch leicht der Betrag und der Zeitpunkt t_m beim Auftreten der Maximalkraft F_{\max} angeben:

$$t_m = \sqrt{\frac{2h_0}{5b}} \quad (5.68)$$

$$F_{\max} = 0,549 \cdot \pi \eta R_0^4 \sqrt{\frac{b}{h_0^5}} \quad (5.69)$$

Für drucktechnisch relevante Geometrien, die von den Stefanschen, relativ großen Platten abweichen, wurden mit dem in Finnland gebauten Parallelplat-

tentackmeter (PPT) /6/ Versuche durchgeführt. Dort wurde für verschiedene Flüssigkeiten mit relativ hohen Viskositäten der Kraft-Zeit-Verlauf bei der Farbspaltung gemessen. Vergleicht man die in /6/ gemessenen Kraft-Zeit-Kurvenverläufe der Spaltkraft F während des Spaltungsvorgangs mit der aus der Stefanschen Theorie nach Zusammenhang (5.67) gerechneten, sieht der Kurvenverlauf für Newtonsche Fluide sehr ähnlich aus.

In Tabelle 2 sind die gemessenen F_{\max} -Werte mit den nach (5.69) gerechneten Werte gegenübergestellt:

R_0 [μm] η [Pas] b [m/s^2]		564 2,1 60	564 7,9 60	564 25,5 60	564 40,5 60	564 50 60	564 67,5 60
h_0 [μm]							
gemess.	5	8,0E-01	4,2E+00	5,8E+00	7,7E+00	8,2E+00	7,7E+00
gerech.	5	5,1E+01	1,9E+02	6,2E+02	9,8E+02	1,2E+03	1,6E+03
gemess.	10	3,1E-01	2,8E+00	4,6E+00	5,6E+00	6,6E+00	7,1E+00
gerech.	10	9,0E+00	3,4E+01	1,1E+02	1,7E+02	2,1E+02	2,9E+02
gemess.	15	1,5E-01	1,4E+00	2,6E+00	3,2E+00	4,1E+00	4,7E+00
gerech.	15	3,3E+00	1,2E+01	4,0E+01	6,3E+01	7,8E+01	1,0E+02
gemess.	20	1,2E-01	8,8E-01	1,7E+00	2,1E+00	2,3E+00	2,9E+00
gerech.	20	1,6E+00	6,0E+00	1,9E+01	3,1E+01	3,8E+01	5,1E+01
gemess.	25	k.A.	5,5E-01	6,9E-01	1,3E+00	1,6E+00	1,6E+00
gerech.	25	9,1E-01	3,4E+00	1,1E+01	1,8E+01	2,2E+01	2,9E+01
gemess.	30	k.A.	4,1E-01	6,8E-01	1,0E+00	1,3E+00	1,6E+00
gerech.	30	5,8E-01	2,2E+00	7,0E+00	1,1E+01	1,4E+01	1,9E+01
gemess.	40	k.A.	4,5E-01	5,1E-01	6,8E-01	9,2E-01	9,2E-01
gerech.	40	2,8E-01	1,1E+00	3,4E+00	5,4E+00	6,7E+00	9,0E+00

k.A.=keine Angabe

Tabelle 2 Spaltkraftmeßwerte in N gemessen von Kelhä u.a. /6/ und gerechnet nach Gleichung (5.69)

Die Werte für F_{\max} nach Tabelle 2 weichen jedoch von den berechneten teilweise erheblich ab. Da alle gemessenen F_{\max} -Werte gegenüber den gerechneten zu niedrig sind, muß ein systematischer Fehler vorliegen. Wahrscheinlich ist, was auch von Kelhä u.a. /6/ angeführt wird, daß die von der Feder des Tackmeters eingebrachte Kraft nicht groß genug war, um eine konstante Beschleunigung von 60 m/s^2 während des Spaltungsvorgangs zu erzielen. Daher sind die Abweichungen umso höher, je größer die Kraft F_{\max} sein müßte (bei kleinen h_0 und hohen Viskositäten!).

Bei realen Offsetdruckfarben, die in der Regel Nicht-Newtonsche Flüssigkeiten sind, verbreitert sich nach /6/ durch die Ausbildung von Farbfäden der Kraft-"Peak" in Abb. 5.9.

Auch für die Umkehrung des Stefanschen Problems, das "Ausquetschen" von Flüssigkeit zwischen zwei sich annähernden Platten, gilt Gleichung (5.67), die auch von Oka /37/ und von Bird und Armstrong /38/ für Newtonsche Flüssigkeiten angegeben wird. Technisch angewandt wird das "Ausquetschen" in Form eines Meßgeräts (Plastometer) zur Beschreibung der Rheologie von Polymeren, wobei dort aber häufig viskoelastische Effekte auftreten, die eine Modifikation der Gleichung erfordern /38/.

5.6 Reibungsfreie Strömung

Eine weitere interessante Teillösung des Problems erhält man, wenn man für Fälle mit relativ großer Reynoldszahl (nur für Farbspaltungsvorgänge bei Flexo- oder Tiefdruck sinnvoll, s. Tabelle 1) die Zähigkeitsterme in den Navier-Stokeschen Gleichungen vernachlässigt. Die Strömung wird somit als reibungsfrei angenommen. Probleme dieser Art werden auf einfache Weise behandelt, indem man eine Funktion $\phi(r,z)$ einführt, die als Geschwindigkeitspotential bezeichnet wird. Sie ist definiert mit:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{und} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (5.70)$$

Mit Hilfe des Potentials ϕ reduzieren sich in diesem Fall die Navier-Stokeschen Gleichungen auf die lineare Laplacesche Gleichung $\Delta\phi=0$. Sie lautet in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.71)$$

Prinzipiell kann aber die Lösung der Potentialgleichung die Haftbedingungen (5.47) und (5.48) nicht erfüllen /30/.

Als Standardlösung der in der Physik oft auftretenden Potentialgleichung findet man in Mathematikbüchern z.B. /26/ auf Produktansätzen beruhende Ausdrücke der Form:

$$\phi = J_0(kr) (A \cos kz + B \sin kz) + C \quad (5.72)$$

Darin sind A, B, C und k Konstanten, und J_0 steht für die Zylinderfunktion nullter Ordnung. Die Zylinderfunktionen sind Lösungen der Besselschen DGL. Leider kann dieser Ansatz die Randbedingung (5.41) an der oberen Platte nicht erfüllen. Dort muß nämlich, unabhängig von r, die Geschwindigkeitskom-

ponente w in z -Richtung gleich der Plattengeschwindigkeit w_h sein. Hier würden nur Reihenansätze mit Summationen wie $\sum_0^{\infty} J_n \cos(nkz)$ Lösungswege erschließen. Die Behandlung dieser Ansätze ist sehr mühsam.

Wie man dagegen sofort sieht, erfüllt das Geschwindigkeitsfeld

$$u = -\frac{1}{2} w_h \frac{r}{h} \quad \text{bzw.} \quad u^* = -\frac{1}{2} r^* \quad (5.73)$$

$$w = w_h \frac{z}{h} \quad \text{bzw.} \quad w^* = z^* \quad (5.74)$$

die Differentialgleichung (5.71) und die Randbedingungen (5.38), (5.40) und (5.41), aber nicht die tangentialen Haftbedingungen (5.44) $u(z=0)=0$ und (5.45) $u(z=h)=0$ an den Platten. Da die Funktion für w die Eigenschaft $w(-z) = -w(z)$ hat, gilt dieses Geschwindigkeitsfeld für die symmetrischen (5.40) und (5.41) wie auch für die asymmetrischen Randbedingungen (5.42) und (5.43). Das Potential des Geschwindigkeitsfeldes aus (5.73) und (5.74), das sowohl für den stationären als auch für den instationären Vorgang gilt, lautet:

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{w_h}{h} \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) + C \quad (5.75)$$

Dabei ist C eine beliebige Integrationskonstante. Das aus (5.75) resultierende Geschwindigkeitsfeld ist in Abb. 5.10 dargestellt.

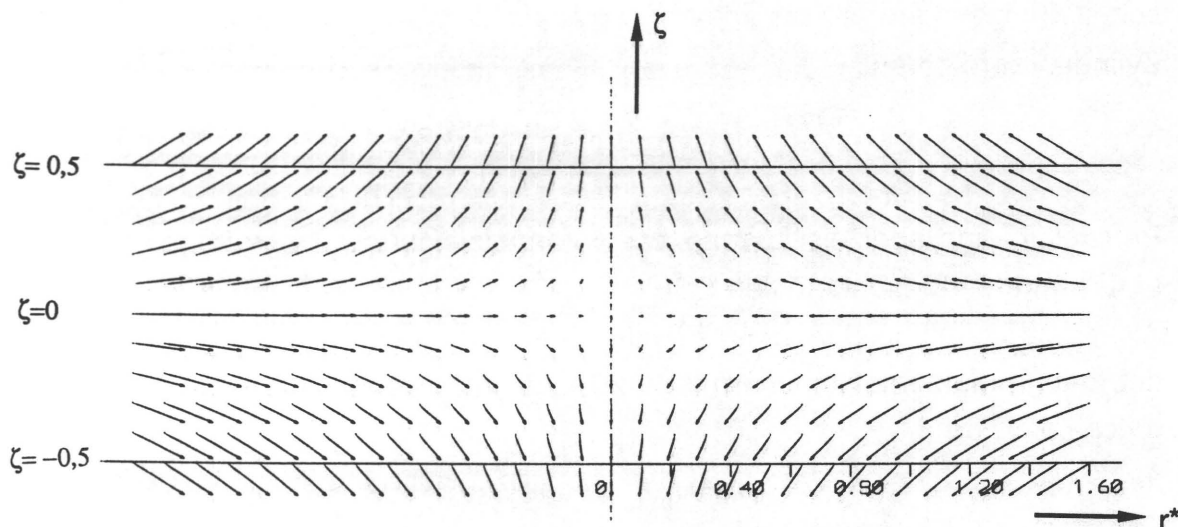


Abb. 5.10 Geschwindigkeitsfeld der Potentialströmung

Da es sich um ein zeitabhängiges Potential handelt, muß das zugehörige Druckfeld in diesem Fall aus der instationären Bernoullischen Gleichung (ohne Gravitation)

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u_i u_i \right) + p = \text{const.}(t) \quad (5.76)$$

berechnet werden. Es lautet (mit dem Druck p_0 bei $r=z=0$):

a) für gleichförmige Bewegung $w_h = \text{const.}$

$$p_0 - p(r) = \frac{3}{8} \frac{\rho w_h^2}{h^2} r^2 \quad (5.77)$$

Erstaunlicherweise ist dieses Druckfeld unabhängig von z !

Der maximale Druck herrscht stets in der Linie $r=0$. Zu den Plattenrändern hin nimmt er quadratisch ab.

b) für beschleunigte Bewegung $b = \text{const.}$

$$p_0 - p(r, z) = \frac{\rho b}{h^2} \left[\frac{h}{2} (r^2 + z^2) - \frac{3}{4} h_0 r^2 \right] \quad (5.78)$$

Bemerkenswert ist hier, daß das Druckfeld zu der Zeit, bei der $h/h_0=1,5$ wird, eine wesentliche Eigenschaft ändert. Zu Beginn der Bewegung ist der Druck in der Symmetrieachse an den bewegten Platten am geringsten mit zunehmendem Druck für r gegen ∞ . Für $h/h_0 > 1,5$ verlagert sich das Druckmaximum an die Stelle $(r=z=0)$. Für die Werte $h/h_0=1,11$ und $h/h_0=2$ sind die Druckfelder in Abb. 5.11 und Abb. 5.12 dargestellt.

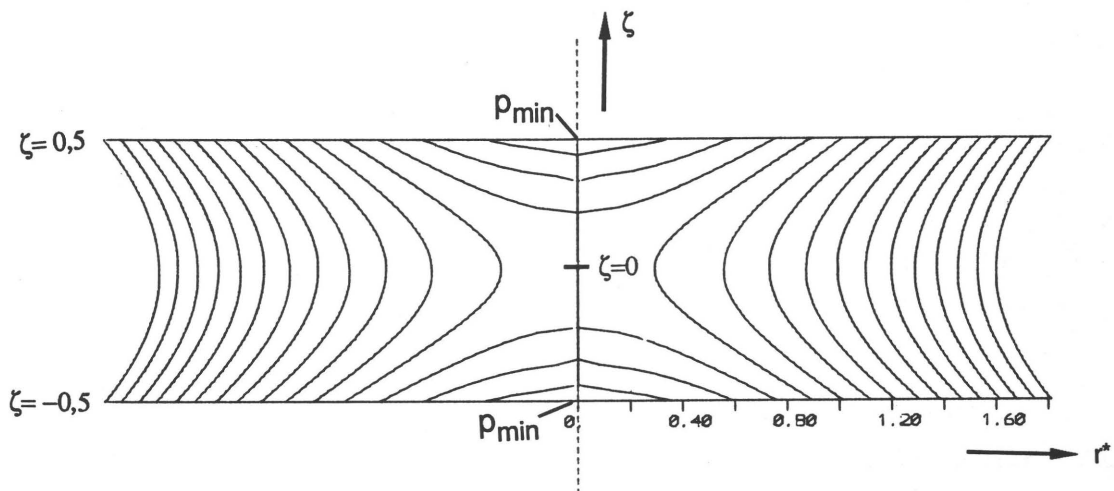


Abb. 5.11 Druckfeld (Isobaren) für Gleichung (5.78) der Potentialströmung bei $h/h_0=1,11$ (mit $r^*=r/h$ und $z^*=z/h$)

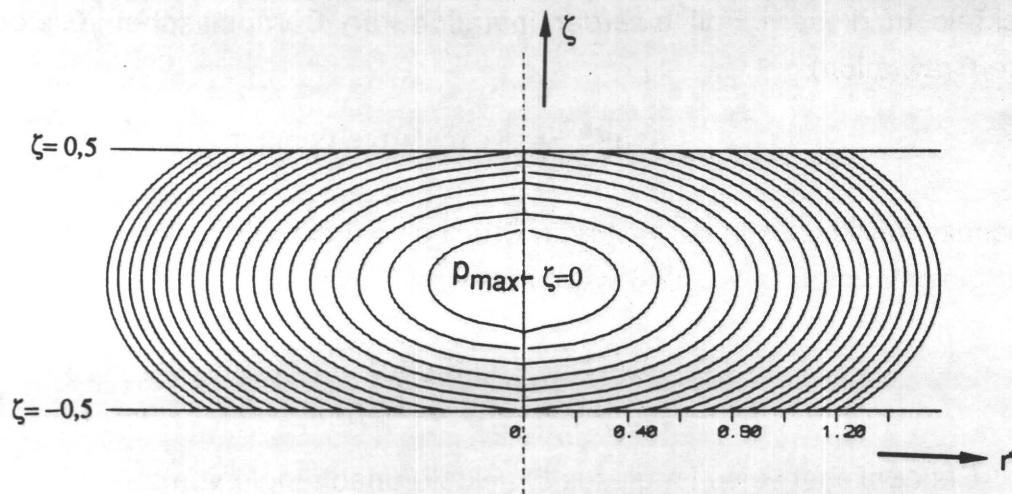


Abb. 5.12 Druckfeld (Isobaren) für Gleichung (5.78) der Potentialströmung bei $h/h_0=2$ (mit $r^*=r/h$ und $z^*=z/h$)

Bisher wurden nur die an den Platten geltenden Randbedingungen berücksichtigt. Die Randbedingungen an der freien Oberfläche sind weitaus schwieriger zu erfüllen. Da hier die Strömung reibungsfrei angenommen wird, reduzieren sich die dynamischen Randbedingungen (5.31) und (5.32) unter Berücksichtigung von (5.27) bzw. (5.51) und (5.52) zu einer einzigen Gleichung, nämlich (4.11), wobei unter p_i der Druck im Inneren der Flüssigkeit entlang der Kurve $r=R(z,t)$ verstanden werden muß. Aus (4.11) folgt dann:

$$p(R,z) = p_a - \gamma_L \left[\frac{R''}{(R'^2 + 1)^{1,5}} - \frac{1}{R (R'^2 + 1)^{0,5}} \right] \quad (5.79)$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung (5.76) kann man den Druck an der freien Oberfläche $p(R,z)$ aus (5.79) eliminieren. Man erhält:

$$p(R,z) = p_a - \gamma_L \left[\frac{R''}{(R'^2 + 1)^{1,5}} - \frac{1}{R (R'^2 + 1)^{0,5}} \right] = \rho \dot{\phi} + \frac{\rho}{2} [\phi_r^2 + \phi_z^2] + C \quad (5.80)$$

Neben der dynamischen Randbedingung muß an der freien Oberfläche aber auch die kinematische Randbedingung (5.37) erfüllt werden, welche sich auch schreiben läßt:

$$\dot{R} - \phi_r + \phi_z R' = 0 \quad (5.37')$$

Unter der Voraussetzung, daß R' und die Geschwindigkeiten zumindest zu Beginn des Trennvorgangs hinreichend klein sind, kann man in (5.80) und (5.37') die quadratischen Terme vernachlässigen und linearisieren:

$$p_a - \gamma_L \left[R'' - \frac{1}{R} \right] = \rho \dot{\phi} + C \quad (5.81)$$

$$\dot{R} - \phi_r = 0 \quad (5.82)$$

Differenziert man (5.81) einmal nach der Zeit und (5.82) zweimal nach z , kann man \dot{R}_{zz} eliminieren, und es ergibt sich an der Stelle $r=R$:

$$\dot{R}_{zz} = \phi_{rzz} = \frac{\rho}{\gamma_L} \ddot{\phi} \quad (5.83)$$

Dabei wurden R mit dem Ausgangsradius R_0 zur Zeit $t=0$ (d.h. $R(z,t=0)=R_0$) angenähert und die willkürliche Konstante C zu Null gesetzt, da sie nur eine Rolle spielt, wenn Unstetigkeiten in der Bewegung vorkommen.

Betrachtet man nun das Potential ϕ nach Gleichung (5.75), stellt man fest, daß ϕ_{rzz} verschwindet, und die zweite Zeitableitung des Potentials, die auf der rechten Seite von (5.83) steht, ebenfalls zu Null wird, wenn h in der Anfangsphase der Bewegung mit h_0 , der Ausgangshöhe zur Zeit $t=0$, angenähert wird.

Die Konsequenz dieser Betrachtung ist, daß das Potential (5.75) die Anfangsphase der Bewegung mit guter Näherung beschreibt, und daß somit die Isobaren die Form der freien Oberfläche $R(z)$ beschreiben. Die Isobaren lassen sich aus (5.77) bzw. (5.78) gewinnen, so daß die in Abb. 5.11 für den Fall (5.78) gezeigten Kurven (quadratische Parabeln) mögliche Konturkurven $R(z)$ darstellen, bei denen lediglich das Tropfenvolumen die Kurve eindeutig festlegt. Für die fortgeschrittene Bewegung ist die oben benutzte Linearisierung, wie die Isobaren in Abb. 5.12 zeigen, nicht mehr zulässig.

5.7 Numerische Lösung unter Berücksichtigung der freien Oberfläche mit Hilfe eines Finite-Elemente-Programms

In jüngster Zeit werden komplizierte strömungstechnische Probleme (z.B. Probleme mit freien Oberflächen) aufgrund steigender Rechnerkapazitäten zunehmend mit numerischen Finite-Elemente-Näherungen erfolgreich behandelt. Da die Komplexität des Problems der Farbübertragung mit großer Wahrscheinlichkeit keine umfassende analytische Behandlung unter Berücksichtigung aller Einflußfaktoren ermöglicht, wurde hier versucht, mit Hilfe des speziell auf die Probleme der Fluidodynamik zugeschnittenen Finite-Elemente-Pro-

grammpakets FIDAP /39/ die Farbtrennvorgänge der zweiten Klasse näher zu beleuchten. Die nachstehenden Rechnungen wurden unter der vereinfachenden Annahme von Newtonschem Materialverhalten durchgeführt. Dies ist, wie bereits in Kap. 3 und 5.4 diskutiert, strenggenommen nur für Tief- und Flexodruckfarben zulässig.

Auf die mathematischen Grundlagen der Methode der finiten Elemente soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie in der einschlägigen Literatur (für freie Oberflächen s. insbesondere Kistler u. Scriven /40/) und insbesondere im theoretischen Handbuch zu FIDAP /39/ ausgiebig erklärt und diskutiert werden.

5.7.1 Allgemeines zum Programm

FIDAP ist in drei Hauptbestandteile gegliedert, die sich aus der Anforderung unterschiedlicher Interaktionen des Benutzers ergeben:

Pre-Prozessor (FIPREP)

Im Pre-Prozessor gibt der Benutzer die Problembeschreibung einschließlich der Formulierung der Randbedingungen und die Problemgeometrie in logischen und geometrischen Koordinaten in einer speziellen Syntax ein. Anschließend ist ein Überprüfen des erzeugten Netzes möglich.

Haupt-Prozessor (FIDAP)

Die Ausgabedatei des Pre-Prozessors, die alle für die Rechnung notwendigen Parameter enthält, ist gleichzeitig wiederum die Eingabedatei für den Haupt-Prozessor. Hier erfolgt im reinen Batch-Betrieb (keine interaktive Benutzung) die Aufstellung und Lösung des zentralen oft mehrere tausend Gleichungen umfassenden Gleichungssystems.

Post-Prozessor (FIPOST)

Im dritten Schritt ist ein Post-Prozessor nachgeschaltet, der es ermöglicht, die Rechenergebnisse, die der Haupt-Prozessor in einem File ausgibt, in graphischer Form (weitgehend geräteunabhängig) interaktiv aufzubereiten.

Die Rechnungen, deren Ergebnisse hier vorgestellt werden, erfolgten auf folgenden Rechenanlagen:

Pre- und Post-Prozessor:

VAX (Fa. Digital Equipment) mit einem Personal-Computer (Apple Macintosh) unter der Terminalemulation Versaterm Pro, die in der Lage ist, die FIDAP-Bildschirm-Grafiken in guter Auflösung auf einem Laserdrucker ausgeben zu können.

Haupt-Prozessor:

CRAY XMP

Das Programm FIDAP scheint insofern für die hier behandelten Probleme geeignet, da es unter anderem in der Lage ist, für zweidimensionale, inkompressible Probleme mit freien Oberflächen die kompletten Navier-Stokesschen Gleichungen zu lösen und die dabei auftretenden dynamischen Kontaktstellen zu simulieren.

Bei der Methode der finiten Elemente wird das Gebiet, auf dem die Feldgleichungen zu lösen sind, in kleine abgeschlossenen Gebiete, die sog. finiten Elemente, unterteilt. Im vorliegenden Fall wurden rechteckige Elemente mit vier Eckpunkten und je neun Knoten (neun Stützstellen für das Geschwindigkeitsfeld) gewählt, so daß das finite Elemente Netz für den Tropfen sich relativ einfach darstellt. Es ist in Abb. 5.13 dargestellt, wobei die Knoten global nummeriert sind. Bei dieser und allen folgenden Abbildungen ist wegen der Rotations-symmetrie jeweils nur die "Hälfte" des Tropfen oberhalb der z-Achse gezeigt.

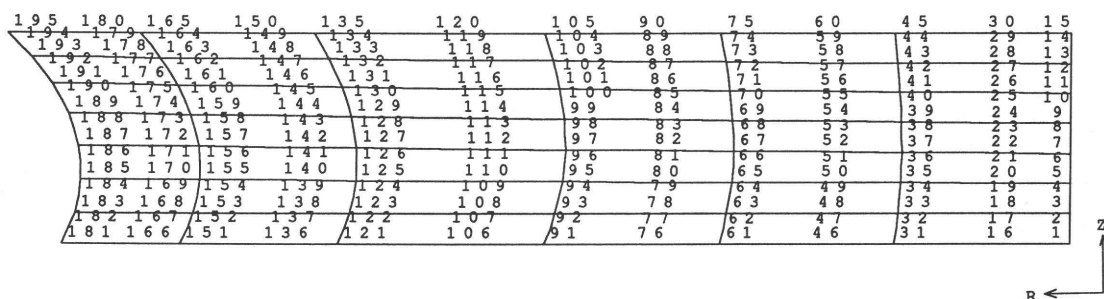


Abb. 5.13 Finite Elemente Netz für Farbspaltungsproblem mit Knotennumerierung

Im FIDAP Pre-Prozessor muß zur Netzgenerierung nur die Lage der äußeren vier Eckpunkte (in Abb. 5.13 Knoten 1,15,181 und 195) und die Anzahl der Knoten in r- und z-Richtung angegeben werden. FIDAP verteilt die "inneren Knoten" in möglichst gleichen Abständen.

Das hier betrachtete Flüssigkeitstrennproblem ist im Sinne von FIDAP ein von der Zeit abhängiger, transients Vorgang. Deshalb muß die Berechnung auch auf der Zeitachse in diskreten Schritten ablaufen. Die Größe der Zeitschritte wird entweder fest vorgegeben oder von FIDAP selbst nach einem Algorith-

mus, der von der Konvergenzgeschwindigkeit des vorigen Schritts abhängt, gesteuert.

5.7.2 Entdimensionierung

Nach /39/ gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Navier-Stokesschen Gleichungen und die Randbedingungen für FIDAP zu entdimensionieren. Die wesentlichen Größen wurden hier für die Rechnung wie folgt entdimensioniert bzw. die Materialeigenschaften wie folgt eingegeben (wie es dem FIDAP-Inputfile FIINP in Anhang A zu entnehmen ist):

charakteristische Geschwindigkeit $U = 1 \text{ m/s}$

charakteristische Länge $L = 10 \mu\text{m}$

Man setzt dann für die Eingabe in FIDAP:

Länge in FIDAP	$x_{\text{FIDAP}} = \frac{x}{L}$
Geschwindigkeit in FIDAP	$u_{\text{FIDAP}} = \frac{u}{U}$
Viskosität der Flüssigkeit in FIDAP	$\eta_{\text{FIDAP}} = 1$
Dichte der Flüssigkeit in FIDAP	$\rho_{\text{FIDAP}} = \text{Reynoldszahl}$
Oberflächenspannung der Flüssigkeit	$\gamma_{\text{LFIDAP}} = \frac{1}{\text{Kapillarzahl}}$
Zeit in FIDAP	$t_{\text{FIDAP}} = \frac{t \cdot U}{L}$
Druck in FIDAP	$p_{\text{FIDAP}} = \text{Re} \cdot \frac{p}{\rho U^2}$

5.7.3 Behandlung der freien Oberflächen in FIDAP

Zur Bestimmung des a priori unbekannten Ortes der freien Oberfläche ist das Programm im Laufe der Berechnung in der Lage, Elementknoten aus ihrer ursprünglichen Position zu verschieben. Diejenigen Elementknoten, die als verschieblich definiert wurden (in der Regel von der freien Oberfläche aus bis in eine gewisse "Tiefe"), werden iterativ derart bewegt, daß neben den Strömungsdifferentialgleichungen auch die kinematische und dynamische Randbedingung erfüllt werden. Die Verschiebung der Knoten wird dabei durch sog. Spines (Spine = Rückgrat) gelenkt. Die Definition der Spines erfolgt durch Vorgabe von Geraden, auf denen die Elementknoten wie Perlen auf einer

Schnur aufgereiht sind. Damit wird die Knotenbewegung auf nur einen Freiheitsgrad beschränkt.

Im vorliegenden Fall des Farbtrennvorgangs bewegen sich sowohl die freie Oberfläche an der Konturkurve $R(z)$ als auch die das Berechnungsgebiet be-
 randenden Platten. Da die Plattenbewegung durch eine Bewegung der Knoten, die an der Platte liegen, simuliert werden muß, und dies in FIDAP nur durch das Einführen von Spines möglich ist, folgt, daß die Eckknoten (Nr. 181 und 195 in Abb. 5.13) auf zwei verschiedenen Spines liegen müßten. Das ist in FIDAP jedoch nicht zulässig. Laut den Herstellern von FIDAP gibt es speziell dafür die Möglichkeit, die Spines um ihren Fußpunkt rotieren zu lassen. Unter Verwendung der FIDAP-"MERGE"-Funktion mit einem Netz nach Abb. 5.14 ließe sich die Bewegung sowohl der freien Oberfläche als auch der Wand theoretisch realisieren. In Abb. 5.14 ist links das logische und rechts das zugehörige geometrische Netz dargestellt. Die MERGE-Funktion läßt die im logischen Netz getrennten Bereiche 5 bis 6 mit 9 bis 6 (bzw. 8 bis 7 mit 10 bis 7) im geometrischen Netz eins werden. Trotz wiederholten und anhaltenden Versuchs konnte jedoch bei Rechnungen mit diesem Netz keine Konvergenz (oder plausible Lösungen) erreicht werden.

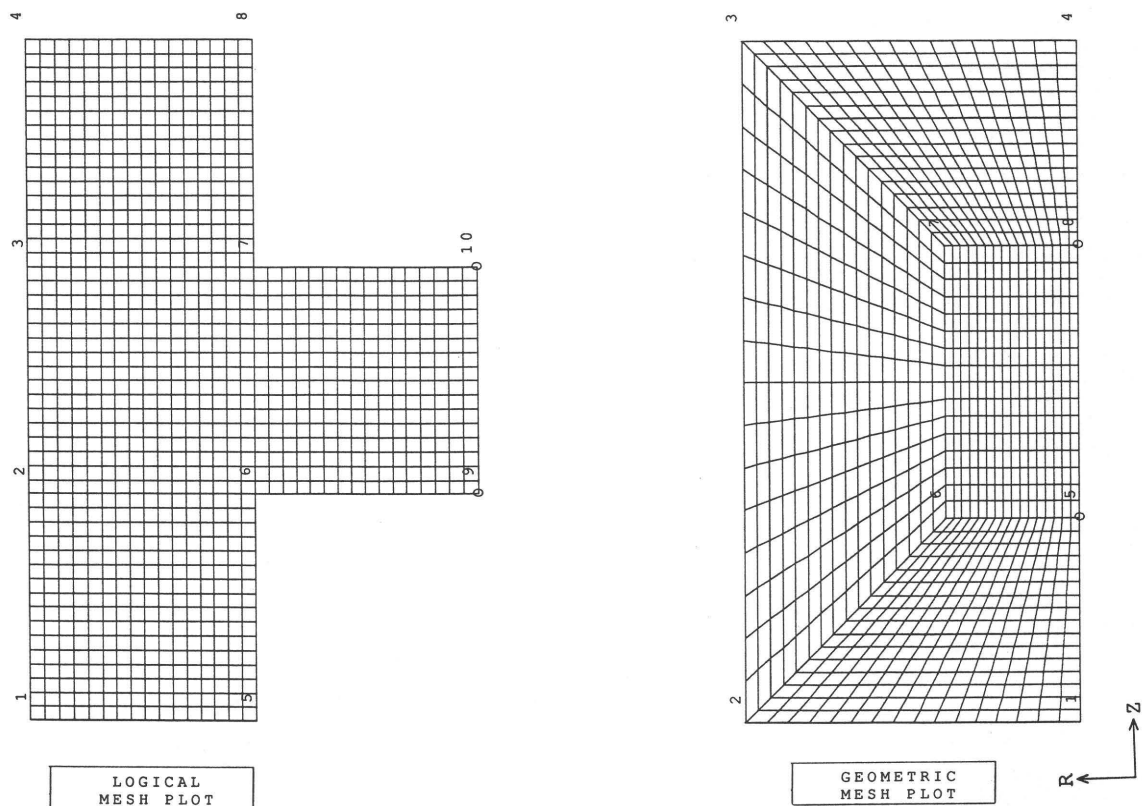


Abb. 5.14 Finite Elemente Netz mit rotierenden Spines

Hier liegen offenbar noch Mängel am Prinzip der Simulation der Bewegung der Knoten vor, die der Hersteller von FIDAP bis jetzt nicht beseitigt hat. Deshalb wurde hier ein Verfahren entwickelt, was die Bewegung der Platten an der Berandung des Lösungsgebiets simuliert, aber auf die rotierenden Spines verzichten kann.

5.7.4 Lösungen mit "starren" Platten, Behandlung der Dreiphasenkontaktstelle

Bevor auf die komplette Lösung des Farbtrennproblems mit beweglichen Platten eingegangen wird, ist es sinnvoll, zunächst die Ergebnisse von Rechnungen mit starren Wänden vorzustellen, da jeweils ein Zeitschritt dieses Problems Bestandteil der Lösung mit bewegten Platten ist.

Obwohl hier die Stellen $z=0$ und $z=h$ demzufolge ortsfest bleiben, wird als Randbedingung an den "Platten" jedem Berandungsknoten die Geschwindigkeit w_h eingeprägt. Da bei jedem Zeitschritt eine bestimmte Fluidmenge somit durch die Platten hindurch "abgesaugt" wird, ist hier die Bedingung konstanten Volumens zwar verletzt, es können jedoch die prinzipiellen Geschwindigkeits- und Druckverteilungen beobachtet und vor allem die verschiedenen Vorgabemöglichkeiten an der Dreiphasenkontaktstelle diskutiert werden.

FIDAP läßt an der bereits in Kap. 4.11 und 5.3.3 diskutierten Dreiphasenkontaktstelle drei Möglichkeiten zu:

- a) Freie Oberfläche "gepinnt" bei R_0 bzw. R_h , d.h. die Geschwindigkeitskomponenten in r -Richtung der Knoten 181 bzw. 195 (s. Abb. 5.13) werden zu Null gezwungen, und die Knoten-Koordinaten $(R_0,0)$ bzw. (R_h,h) bleiben zeitunabhängig ortsfest. Der zugehörige Randwinkel kann nun nicht mehr vorgegeben werden und stellt sich ein.
- b) Die Geschwindigkeitskomponenten in r -Richtung der Knoten 181 bzw. 195 werden wie bei a) zu Null gezwungen, nur wird jetzt eine Bewegung der "Plattenknoten" entlang der äußersten Spines zugelassen. Auch hier kann der zugehörige Randwinkel nicht vorgegeben werden und stellt sich ein.
- c) Freilassen der Radialgeschwindigkeitskomponente an den Eckknoten 181 bzw. 195. Damit können sich die Knoten auf ihren Spines frei bewegen und stellen ihre Position je nach dem Kräftespiel bei vorgegebenen Randwinkel (Young-Duprésche Bedingung) ein.

Die folgenden Abbildungen 5.15, 5.16 und 5.17 sind die Ergebnisse der FIDAP-Rechnungen bei sonst gleichen Vorgaben für die verschiedenen Fälle von Randbedingungen a), b) und c). Bei den Rechnungen waren gemeinsam: $R_0=30\mu\text{m}$, $h_0=10\mu\text{m}$, $\eta=0,02\text{Pas}$, $b=5000\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\gamma=0,03\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\text{Ca}=0,667$ und $\text{Re}=0,5$.

Bei den Abbildungen, die die Veränderung der Position der freien Oberfläche darstellen, sind die verschiedenen Linien der Konturpositionen für sukzessive Zeitschritte übereinander geplottet (dies gilt auch für die folgenden Abschnitte).

Abb. 5.15 a zeigt, daß bei "gepinnter" Dreiphasenkontaktstelle die numerische Rechnung bereits kurz nach Beginn der Spaltungsbewegung nicht mehr in der Lage ist, die freie Oberfläche bei stetiger Krümmung zu halten. Da die Elemente in den Ecken wahrscheinlich zu spitz werden, ist kurz darauf keine Konvergenz mehr zu erzielen. Auch im Fall c) entstehen ab einem gewissen Fortschreiten der Spaltungsbewegung Knicke in der freien Oberfläche (Abb. 5.17 a), während im Fall b) die freie Oberfläche bis hin zu sehr kleinen Tropfenradien stetig bleibt (Abb. 5.16 a).

Deutlich ist zu sehen, daß in allen drei Fällen die Isobarenverteilungen (Abb. 5.15 c), 5.16 c) und 5.17 c) bis auf den Bereich in der Nähe der freien Oberfläche den Stefanschen nach Abb. 5.8 sehr ähnlich sind. Aus diesen Abbildungen, die den Zustand zum etwa gleichen Zeitpunkt des Vorgangs wiedergeben, ist abzulesen, daß zwischen den Isobarenverteilungen kaum Unterschiede bestehen, außer in den Ecken der Abb. 5.17 c), wo sich die Isobaren unterhalb der festen Randwinkel stark verdichten. Dies steht im Zusammenhang mit den von Huh und Scriven /17/ vorausgesagten Eckensingularitäten. Im Fall b) werden die Druckgradienten dagegen schnell abgebaut, was auch Abb. 5.16 d) verdeutlicht, die einen späteren Zeitpunkt wiedergibt.

Auch die Plots 5.15 f) und 5.17 f) mit den Linien gleicher z-Geschwindigkeitskomponenten w sind untereinander sehr ähnlich und korrespondieren mit Gleichung (5.64), die $w=f(r)$ prognostiziert.

Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Fällen machen sich somit am deutlichsten im Isobarenverlauf in der Nähe der Dreiphasengrenze und im zeitlichen Verlauf des Drucks an dieser Stelle bemerkbar. Im Vergleich der Abb. 5.15 h), 5.16 e) und 5.17 j) fällt auf, daß im Fall a) der Druck aller Knoten bei der Zeit 2 ungefähr gleichzeitig nicht weiter fällt, sondern zu steigen beginnt, während in den anderen Fällen der Druck an den Knoten im Zentrum der Flüssigkeitsbrücke deutlich anderes Verhalten zeigt, als an der freien Oberfläche.

Abb. 5.15 a)

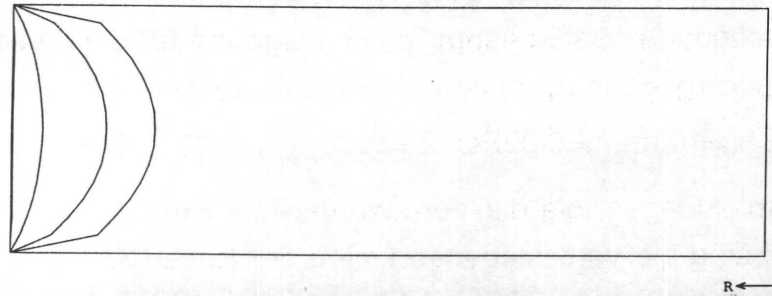
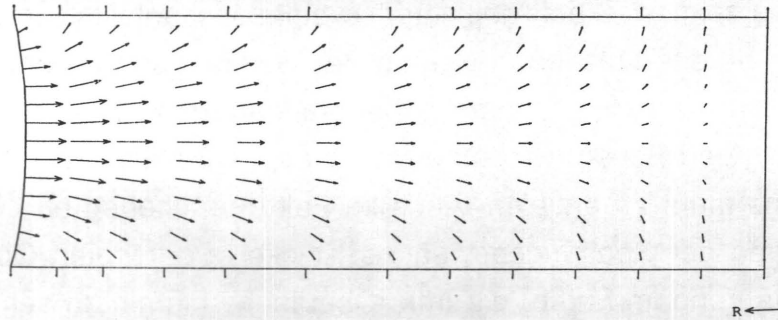
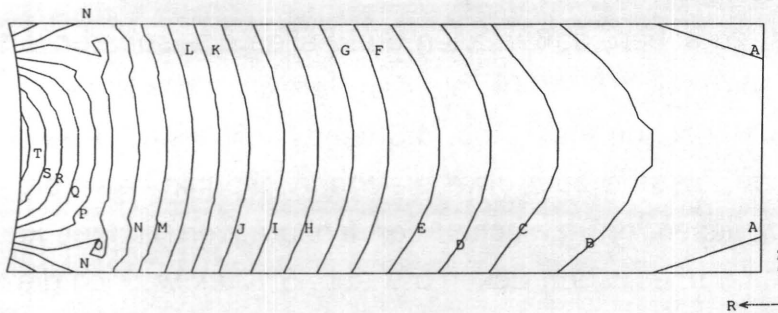


Abb. 5.15 b)



PRESSURE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .2135E+01
B	- .2031E+01
C	- .1928E+01
D	- .1824E+01
E	- .1721E+01
F	- .1617E+01
G	- .1513E+01
H	- .1410E+01
I	- .1306E+01
J	- .1202E+01
K	- .1099E+01
L	- .9953E+00
M	- .8916E+00
N	- .7880E+00
O	- .6844E+00
P	- .5808E+00
Q	- .4772E+00
R	- .3736E+00
S	- .2700E+00
T	- .1664E+00
MINIMUM	
-0.21868E+01	
MAXIMUM	
-0.11457E+00	
TIME 0.602E+00	

Abb. 5.15 c)



STREAMLINE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .8083E+00
B	- .7232E+00
C	- .6381E+00
D	- .5530E+00
E	- .4679E+00
F	- .3829E+00
G	- .2978E+00
H	- .2127E+00
I	- .1276E+00
J	- .4252E-01
K	- 0.4256E-01
L	- 0.1276E+00
M	- 0.2127E+00
N	- 0.2978E+00
O	- 0.3829E+00
P	- 0.4680E+00
Q	- 0.5531E+00
R	- 0.6381E+00
S	- 0.7232E+00
T	- 0.8083E+00
MINIMUM	
-0.85081E+00	
MAXIMUM	
0.85084E+00	
TIME 0.602E+00	

Abb. 5.15 d)

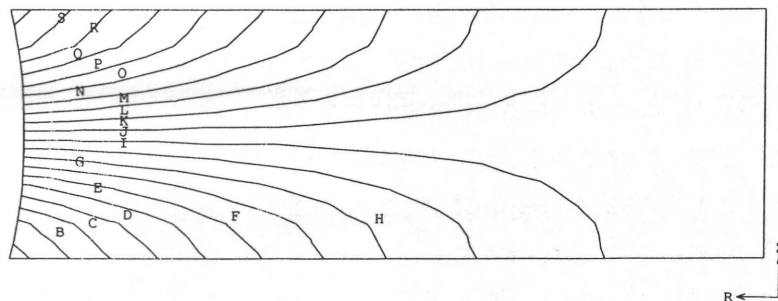
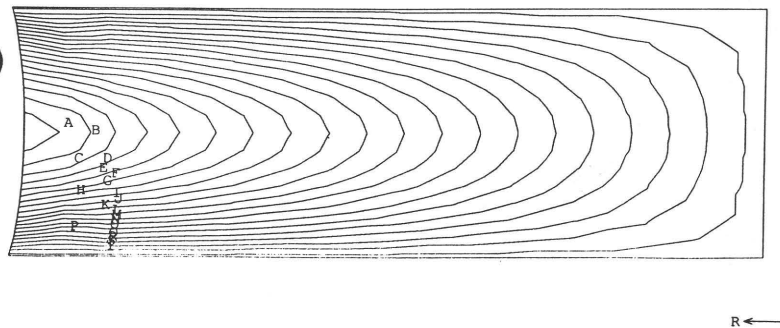


Abb. 5.15 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)

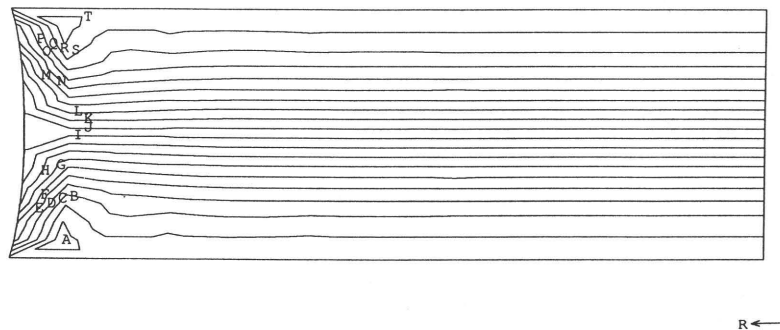
- a) Veränderung der Lage der freien Oberfläche mit der Zeit
- b) Geschwindigkeitsfeld bei $t_{\text{real}} = 0,006\text{ms}$
- c) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,006\text{ms}$
- d) Stromlinien bei $t_{\text{real}} = 0,006\text{ms}$

Abb. 5.15 e)



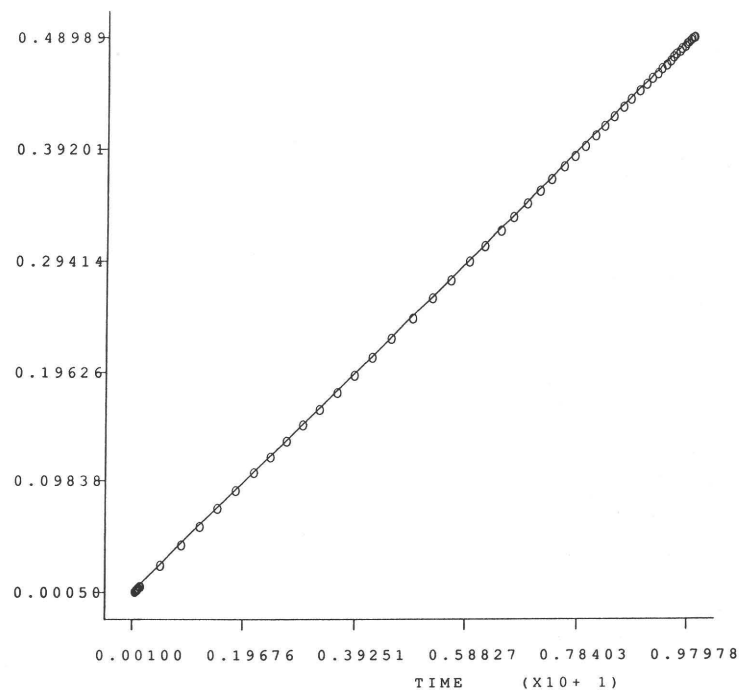
R COMP. VELOC CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .1315E+00
B	- .1248E+00
C	- .1180E+00
D	- .1113E+00
E	- .1045E+00
F	- .9778E-01
G	- .9104E-01
H	- .8429E-01
I	- .7755E-01
J	- .7081E-01
K	- .6406E-01
L	- .5732E-01
M	- .5058E-01
N	- .4383E-01
O	- .3709E-01
P	- .3035E-01
Q	- .2360E-01
R	- .1686E-01
S	- .1012E-01
T	- .3372E-02
MINIMUM	
-0.13487E+00	
MAXIMUM	
0.00000E+00	
TIME 0.602E+00	

Abb. 5.15 f)



Z COMP. VELOC CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .3180E-01
B	- .2845E-01
C	- .2510E-01
D	- .2176E-01
E	- .1841E-01
F	- .1506E-01
G	- .1172E-01
H	- .8368E-02
I	- .5021E-02
J	- .1674E-02
K	0.1674E-02
L	0.5021E-02
M	0.8368E-02
N	0.1172E-01
O	0.1506E-01
P	0.1841E-01
Q	0.2176E-01
R	0.2510E-01
S	0.2845E-01
T	0.3180E-01
MINIMUM	
-0.33473E-01	
MAXIMUM	
0.33473E-01	
TIME 0.602E+00	

Abb. 5.15 g)



TIME HISTORY PLOT	
NODE 15, U	

Abb. 5.15 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)

- e) Linien gleicher Geschwindigkeit u (r-Komponente) bei $t_{\text{real}} = 0,006\text{ms}$
- f) Linien gleicher Geschwindigkeit w (z-Komponente) bei $t_{\text{real}} = 0,006\text{ms}$
- g) zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit u am Knoten Nr. 15

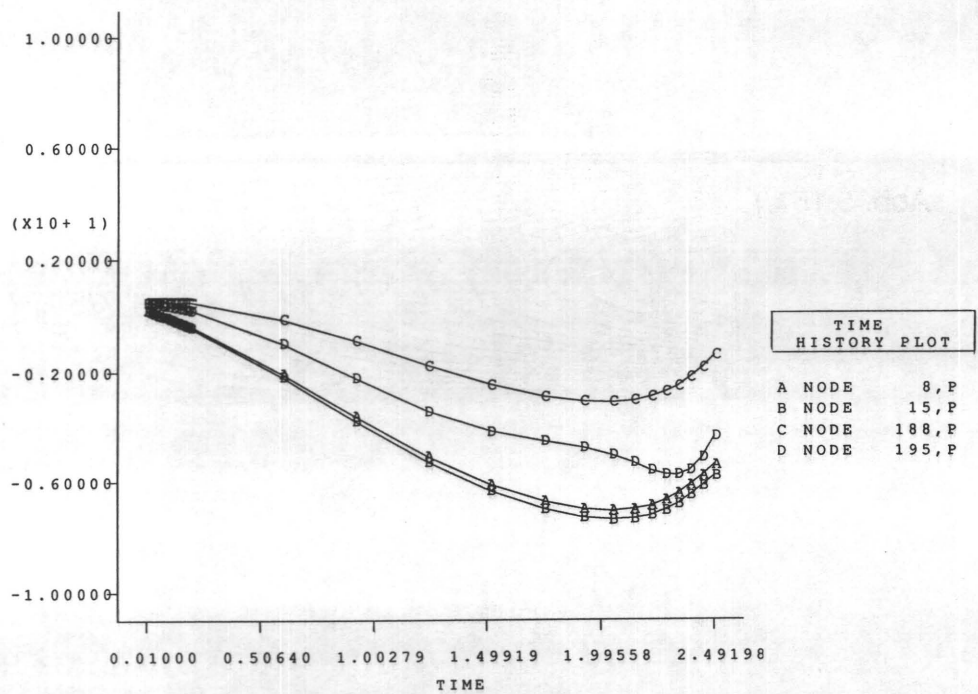


Abb. 5.15 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)
h) zeitlicher Verlauf des Drucks an den Knoten Nr. 8, 15, 188 und 195

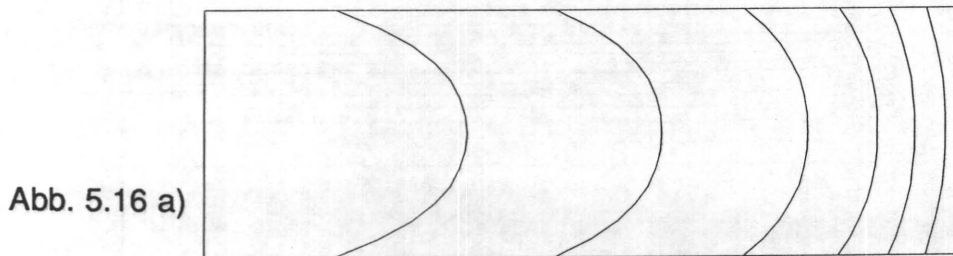


Abb. 5.16 a)

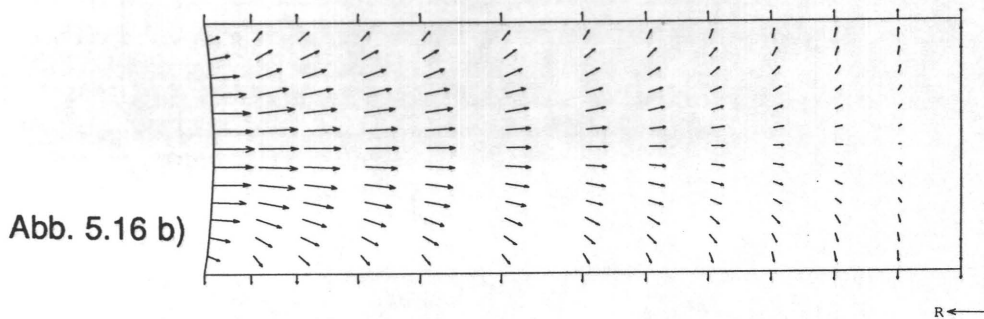


Abb. 5.16 b)

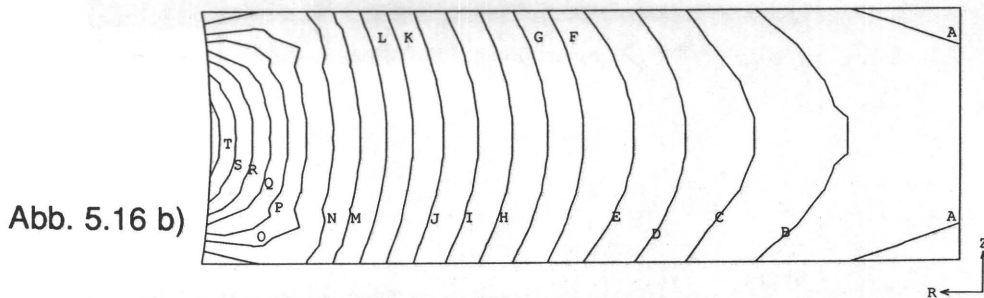


Abb. 5.16 b)

Abb. 5.16 FIDAP Ergebnisse bei beweglicher freier Oberfläche, Fall b)
a) Veränderung der Lage der freien Oberfläche mit der Zeit
b) Geschwindigkeitsfeld bei $t_{\text{real}} = 0,0046\text{ms}$
c) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,0046\text{ms}$

Abb. 5.16 d)

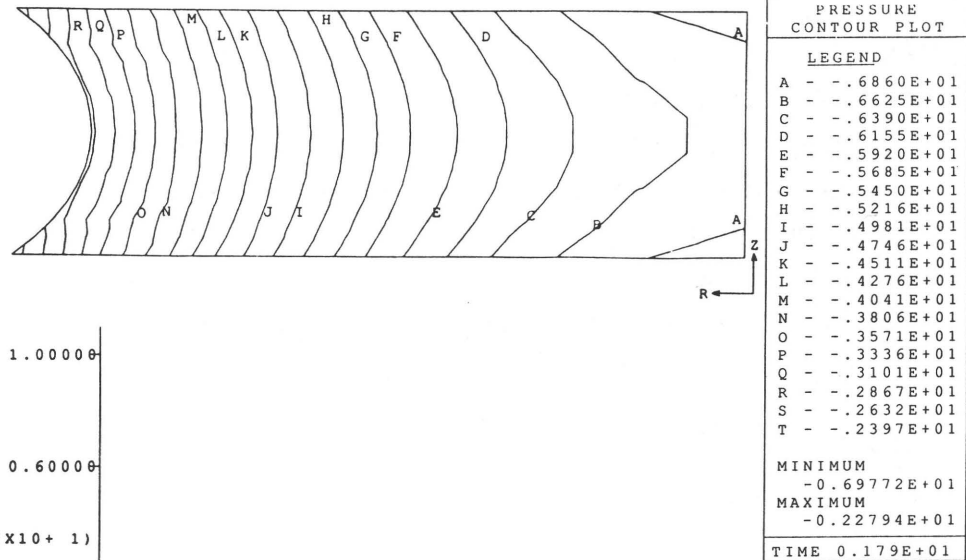


Abb. 5.16 e)

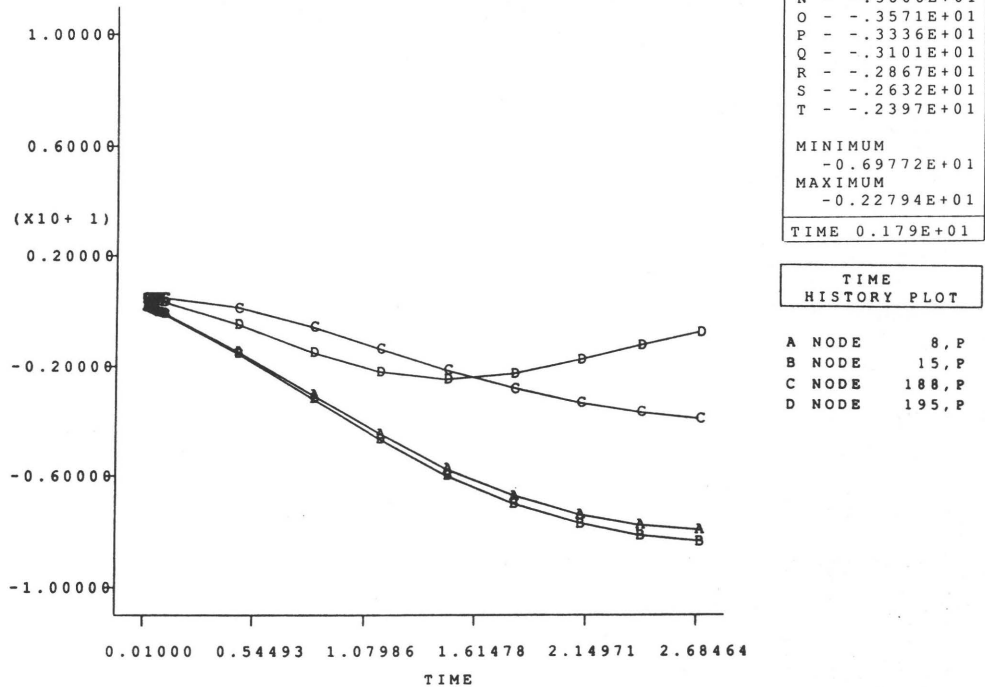


Abb. 5.16 f)

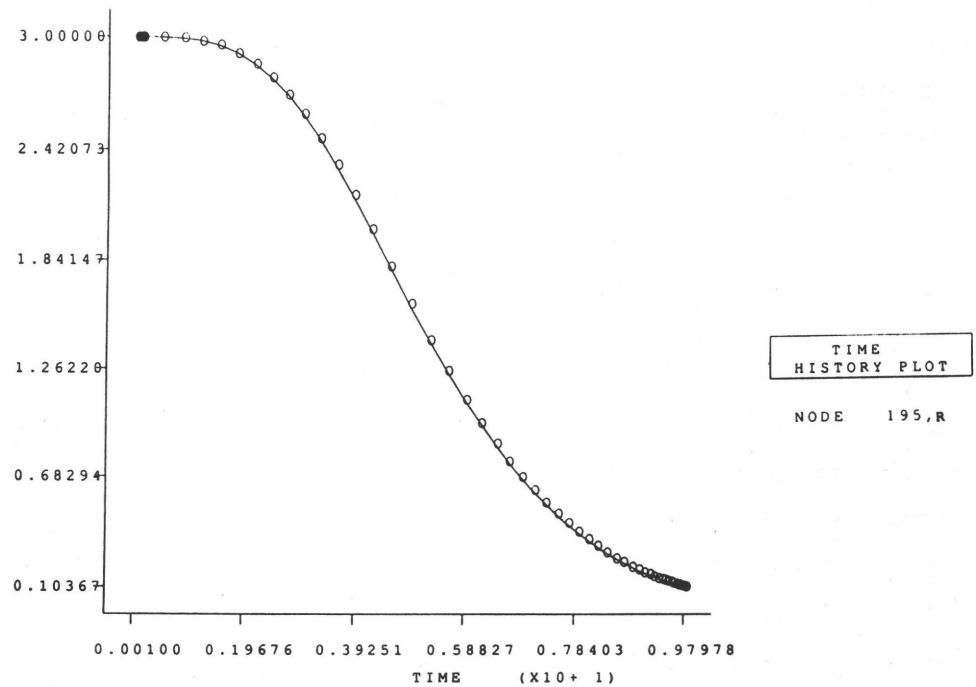


Abb. 5.16 FIDAP Ergebnisse bei beweglicher freier Oberfläche, Fall b)
d) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{real} = 0,0179ms$
e) zeitlicher Verlauf des Drucks an den Knoten Nr. 8,15,188 und 195
f) zeitlicher Verlauf der r-Position des Knotens Nr. 195

Fall c) bedarf einer weiteren Diskussion. In diesem Fall besteht nämlich die Möglichkeit, einen sog. Slipkoeffizienten vorzugeben, der Werte von nahezu 0 bis ∞ annehmen kann (ohne Vorgabe eines Wertes wird von FIDAP automatisch ∞ eingestellt). Der Slipkoeffizient dient im wesentlichen dazu, die bei Huh und Scriven /17/ auftretenden Singularitäten an der Dreiphasenkontaktstelle (s. Kap 5.3.3) zu umgehen. Der Slipkoeffizient β verknüpft nach /39/ und nach Kistler und Scriven /40/ die Differenzgeschwindigkeit Fluid-Festkörper mit der Tangentialkomponente t_t des Randspannungsvektors.

$$t_t = \tau_{ij} n_j t_i = \frac{1}{\beta} (u_i - u_i^w) t_i \quad (5.84)$$

Es sind dabei \mathbf{t} und \mathbf{n} die Tangential- bzw. Normalenvektoren zur Festkörperoberfläche und \mathbf{u}^w der Geschwindigkeitsvektor der Festkörperoberfläche.

Bei Hocking /36/, auf den die Einführung des Slipkoeffizienten wahrscheinlich zurückgeht, war der Slipkoeffizient definiert mit (Ψ =Stromfunktion):

$$\frac{1}{\beta} (u_i - u_i^w) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} \quad (5.85)$$

Der Vergleich mit einem Reibkoeffizient liegt nahe, hinkt aber etwas, da der Slipkoeffizient dimensionsbehaftet ist. Bei Kistler und Scriven hat der Slipkoeffizient die Dimension $\frac{m^3}{Ns}$ (erst $\beta \cdot \eta$ ergibt dann eine Länge). Hocking /36/ setzt den Slipkoeffizient direkt mit der Dimension einer Länge an. Hocking versucht eine physikalische Deutung dieser Länge, indem er ihre Größenordnung einerseits im Molekularbereich vermutet, andererseits im Bereich der Rauhtiefe des Festkörpers annimmt. Zur letzteren Annahme gelangt man insbesondere beim Rückzug der Dreiphasenkontaktlinie, wenn man sich vorstellt, daß die Rauheitstäler mit Flüssigkeit gefüllt sind und beim Zurückweichen der Flüssigkeit gefüllt bleiben, womit ein leichtes Gleiten der Flüssigkeit "auf sich selbst" ermöglicht wird.

Um den Einfluß der Slipbedingung auf den Spaltungsvorgang zu prüfen, wurde bei einer Rechnung für die äußersten Eckenelemente (auf der Berandungslinie von Knoten Nr. 151 bis 181 bzw. von Nr. 165 bis 195) an der freien Oberfläche ein Slipkoeffizient von $\beta=0.001$ eingeführt. Die damit erhaltenen Ergebnisse wiesen keinerlei Unterschied zu den mit $\beta=\infty$ erzielten Ergebnissen auf, welche in Abb. 5.17 a)-l) aufgezeigt sind.

Die Vorgabe unterschiedlicher Randwinkel für die Rechnung zu Abb. 5.17 erweist sich als nicht in dem Maße ausschlaggebend für die Lage des minimalen Radius wie im quasi statischen Fall.

Abb. 5.17 a)

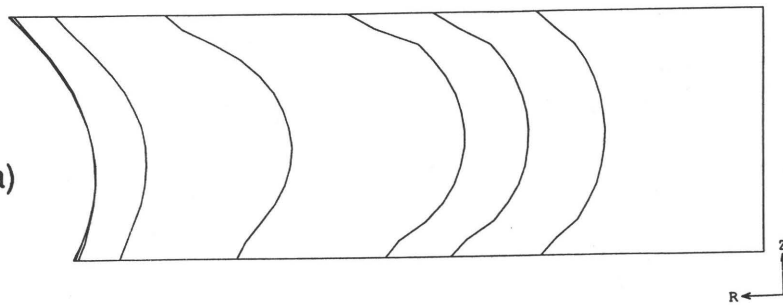


Abb. 5.17 b)

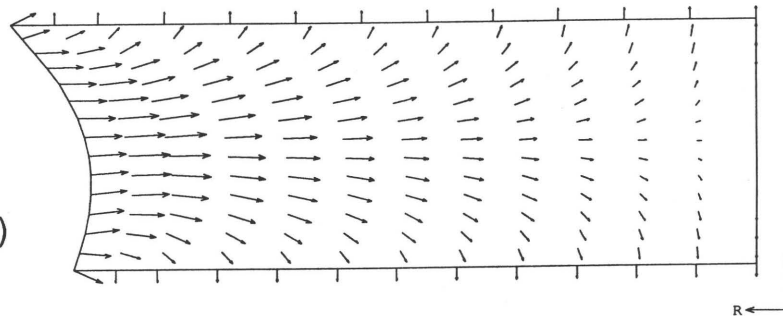


Abb. 5.17 c)

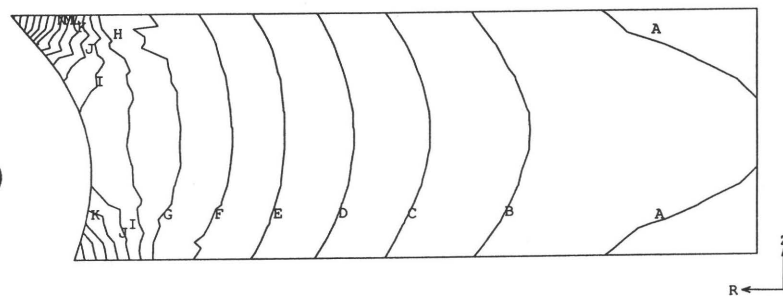
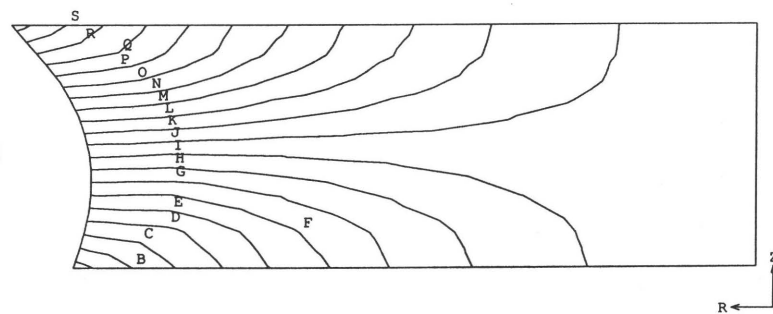


Abb. 5.17 d)



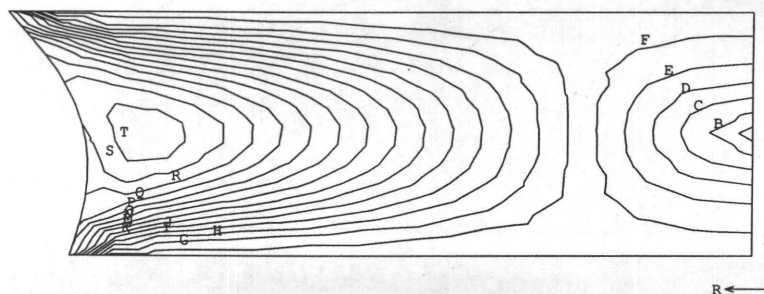
PRESSURE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .2832E+01
B	- .2651E+01
C	- .2470E+01
D	- .2289E+01
E	- .2108E+01
F	- .1927E+01
G	- .1746E+01
H	- .1565E+01
I	- .1383E+01
J	- .1202E+01
K	- .1021E+01
L	- .8400E+00
M	- .6589E+00
N	- .4777E+00
O	- .2966E+00
P	- .1155E+00
Q	0.6567E-01
R	0.2468E+00
S	0.4279E+00
T	0.6091E+00
MINIMUM	
-0.29230E+01	
MAXIMUM	
0.69963E+00	
TIME 0.555E+00	

STREAMLINE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .6275E+00
B	- .5547E+00
C	- .4820E+00
D	- .4092E+00
E	- .3364E+00
F	- .2636E+00
G	- .1908E+00
H	- .1181E+00
I	- .4527E-01
J	0.2751E-01
K	0.1003E+00
L	0.1731E+00
M	0.2459E+00
N	0.3186E+00
O	0.3914E+00
P	0.4642E+00
Q	0.5370E+00
R	0.6098E+00
S	0.6825E+00
T	0.7553E+00
MINIMUM	
-0.66391E+00	
MAXIMUM	
0.79171E+00	
TIME 0.555E+00	

Abb.5.17 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=70^\circ$, $\vartheta_h=50^\circ$, Fall c)

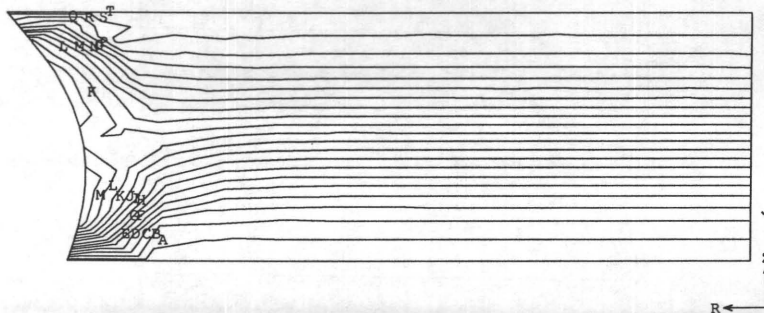
- a) Veränderung der Lage der freien Oberfläche mit der Zeit
- b) Geschwindigkeitsfeld bei $t_{\text{real}}=0,0056\text{ms}$
- c) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}}=0,0056\text{ms}$
- d) Stromlinien bei $t_{\text{real}}=0,0056\text{ms}$

Abb. 5.17 e)



SPEED CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- 0.2404E-02
B	- 0.7147E-02
C	- 0.1189E-01
D	- 0.1663E-01
E	- 0.2138E-01
F	- 0.2612E-01
G	- 0.3086E-01
H	- 0.3560E-01
I	- 0.4035E-01
J	- 0.4509E-01
K	- 0.4983E-01
L	- 0.5458E-01
M	- 0.5932E-01
N	- 0.6406E-01
O	- 0.6880E-01
P	- 0.7355E-01
Q	- 0.7829E-01
R	- 0.8303E-01
S	- 0.8778E-01
T	- 0.9252E-01
MINIMUM	
0.33005E-04	
MAXIMUM	
0.94890E-01	
TIME 0.555E+00	

Abb. 5.17 f)



Z COMP. VELOC CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- - .2634E-01
B	- - .2357E-01
C	- - .2080E-01
D	- - .1803E-01
E	- - .1525E-01
F	- - .1248E-01
G	- - .9706E-02
H	- - .6933E-02
I	- - .4160E-02
J	- - .1387E-02
K	- 0.1387E-02
L	- 0.4160E-02
M	- 0.6933E-02
N	- 0.9706E-02
O	- 0.1248E-01
P	- 0.1525E-01
Q	- 0.1803E-01
R	- 0.2080E-01
S	- 0.2357E-01
T	- 0.2634E-01
MINIMUM	
-0.27732E-01	
MAXIMUM	
0.27732E-01	
TIME 0.555E+00	

Abb. 5.17g)

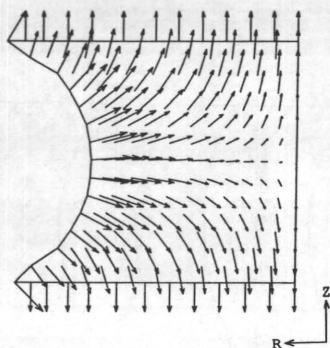
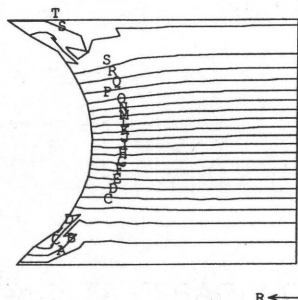
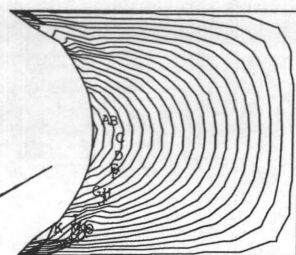


Abb. 5.17 h) i)

R COMP. VELOC CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- - .3690E+00
B	- - .3501E+00
C	- - .3311E+00
D	- - .3122E+00
E	- - .2933E+00
F	- - .2744E+00
G	- - .2555E+00
H	- - .2365E+00
I	- - .2176E+00
J	- - .1987E+00
K	- - .1798E+00
L	- - .1608E+00
M	- - .1419E+00
N	- - .1230E+00
O	- - .1041E+00
P	- - .8515E-01
Q	- - .6623E-01
R	- - .4731E-01
S	- - .2838E-01
T	- - .9461E-02
MINIMUM	
-0.37845E+00	
MAXIMUM	
0.00000E+00	
TIME 0.568E+01	



Z COMP. VELOC CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- - .2696E+00
B	- - .2406E+00
C	- - .2116E+00
D	- - .1826E+00
E	- - .1537E+00
F	- - .1247E+00
G	- - .9570E-01
H	- - .6672E-01
I	- - .3775E-01
J	- - .8770E-02
K	- 0.2021E-01
L	- 0.4918E-01
M	- 0.7816E-01
N	- 0.1071E+00
O	- 0.1361E+00
P	- 0.1651E+00
Q	- 0.1941E+00
R	- 0.2230E+00
S	- 0.2520E+00
T	- 0.2810E+00
MINIMUM	
-0.28404E+00	
MAXIMUM	
0.29548E+00	
TIME 0.568E+01	

Abb. 5.17 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=70^\circ$, $\vartheta_h=50^\circ$, Fall c)

- e) Linien gleichen Geschwindigkeitsbetrags bei $t_{\text{real}} = 0,0056\text{ms}$
- f) Linien gleicher Geschwindigkeit w (z-Komponente) bei $t_{\text{real}} = 0,0056\text{ms}$
- g) Geschwindigkeitsfeld bei $t_{\text{real}} = 0,057\text{ms}$
- h) Linien gleicher Geschwindigkeit u (r-Komponente) bei $t_{\text{real}} = 0,057\text{ms}$
- i) Linien gleicher Geschwindigkeit w (z-Komponente) bei $t_{\text{real}} = 0,057\text{ms}$

Abb. 5.17 j)

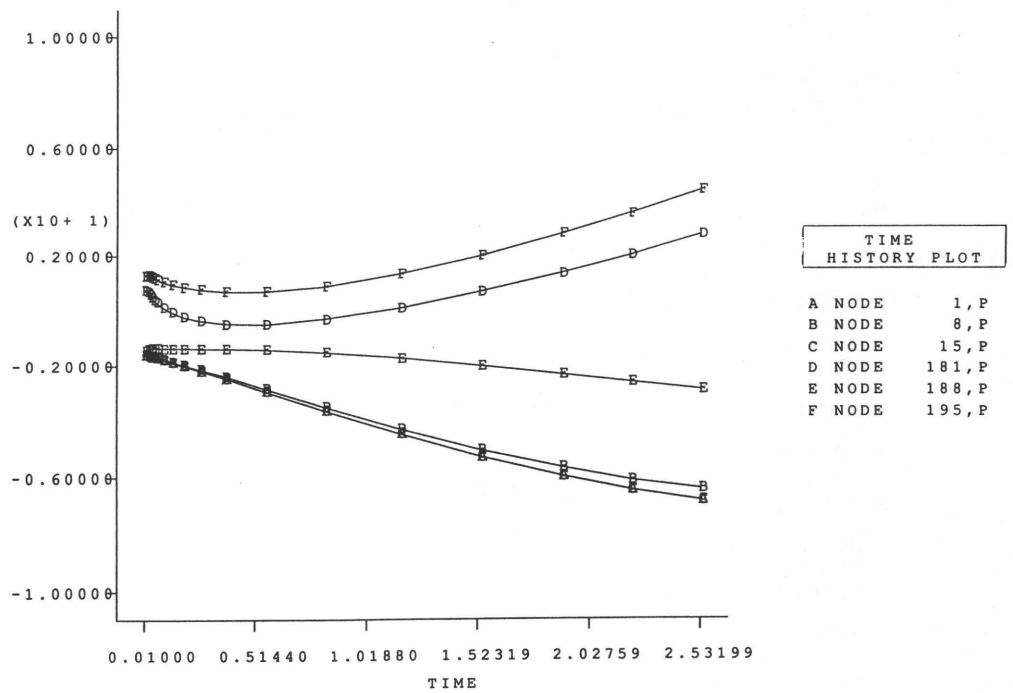


Abb. 5.17 k)

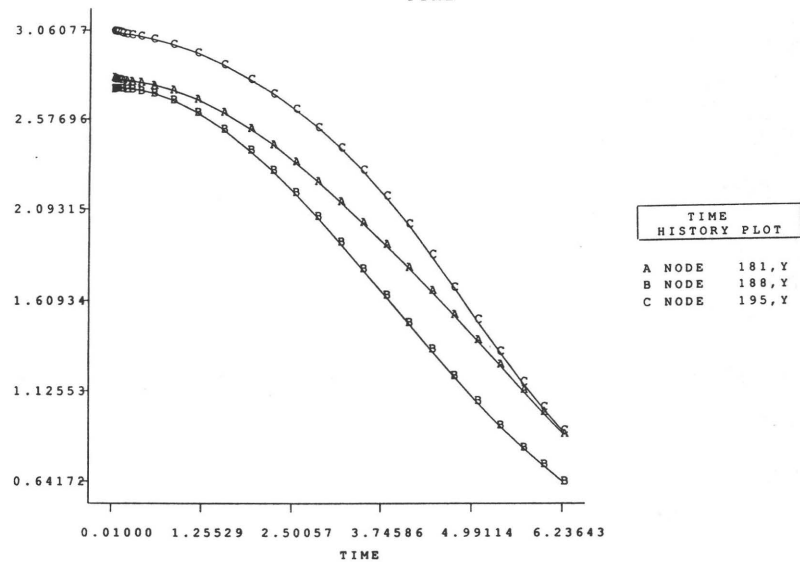


Abb. 5.17 l)

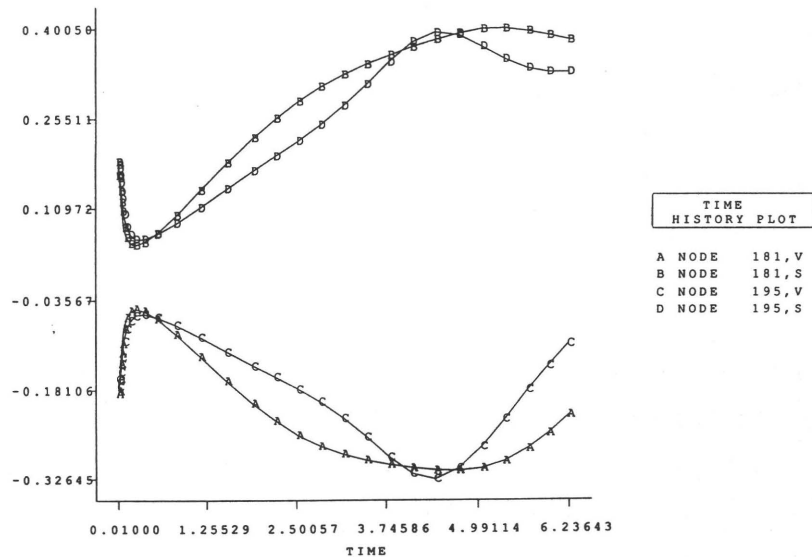


Abb. 5.17 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=70^\circ$, $\vartheta_n=50^\circ$, Fall c)

j) zeitlicher Verlauf des Drucks für Knoten Nr. 1,8,15,181,188 und 195

k) zeitlicher Verlauf der r-Position für Knoten Nr. 181,188 und 195

l) zeitl. Verlauf von u und des Geschwindigkeitsbetrags f. Knoten Nr. 181 und 195

5.7.5 Prozedur für Lösungen mit bewegten Platten

Da wie bereits oben erwähnt, die Bewegung der Platten mit FIDAP allein nicht simuliert werden kann, muß jeweils zwischen dem Berechnen eines Zeitschritts mit den "Saugrandbedingungen" ein "manuelles" Verschieben der Platten unter Beachtung der Volumenkonstanz vorgenommen werden.

Das Vorgehen zur Lösung des Problems des Flüssigkeitstrennprozesses unter Simulation der Plattenbewegung ist nun folgendermaßen:

- 1) Eine Startlösung (FIPREP+FIDAP) wird mit Hilfe der "Saugbedingung" an den festen Wänden (Platten) berechnet, d.h. in FIDAP wird ein Zeitschritt ausgeführt, wobei nur eine Verschiebung der freien Oberfläche auftritt, während die Platten ihre Lage nicht verändern. Ein Beispiel für ein FIDAP-Inputfile dazu ist in Anhang A zu finden.
- 2) Aus dem FDOUT-Lösungsfile von 1) wird die Lage (r- und z-Koordinaten) der Knoten der freien Oberfläche gelesen und ein Datenfile (FIDAP-Bezeichnung: FISPLN) mit dieser Information geschrieben.
- 3) Mit Hilfe eines Pre-Prozessor-Laufs unter Verwendung des neuen FISPLN-Files (CURVE-Anweisung in FIPREP) werden das FE-Netz neu erstellt und die inneren Knoten gleichmäßig verteilt.
- 4) Der Haupt-Prozessor rechnet einen Zeitschritt unter Benutzung des Geschwindigkeitsfeldes vom vorherigen Lauf. Dabei wird die kinematische und dynamische Randbedingung an der freien Oberfläche erfüllt. Je nach den Vorgaben werden die vorgegebenen Randwinkel eingestellt.
- 5) Aus dem Lösungsfile von 4) wird mit Hilfe der FORTRAN-Routine VOLCORR.FOR (s. Anhang C) die neue Lage (r- und z-Koordinaten) der Knoten der freien Oberfläche gelesen, der Weg errechnet, den die Knoten an der Wand durch die Bewegung der Platten zurücklegen müssen, und aus dem Vergleich mit der alten Lage der Oberfläche das während des Zeitschritts durch die Berandung ausgetretene Flüssigkeitsvolumen bestimmt. Da dennoch ein kleiner Volumenverlust auftritt, werden die r-Positionen der Knoten 181 bis 195 solange wieder nach "außen" bewegt, bis das während des Spaltungsvorgangs konstant bleibende Ausgangs-Sollvolumen erreicht ist. Diese Werte fließen wieder in das CURVE-File FISPLN ein. Das FIDAP-Inputfile FIINP muß ebenfalls wegen der neuen Lage der Eckknoten Nr. 181 und 195 modifiziert werden, was mit dem Programm WRITE_FIINP.FOR (s. Anhang D) ohne Interaktion des Benutzers automatisch erfolgt.

- 6) Wiederholen der Schritte 3) bis 5), bis in 4) keine Konvergenz mehr zu erreichen ist.
- 7) Das Zusammenbinden der Ergebnisfiles (jede Schleife 3 bis 5 erzeugt einen separaten Ergebnisfile) aus den jeweiligen Hauptprozessorläufen geschieht mit der FIDAP-Utility FICONV

Die Schleife 3) bis 5) im Verfahren wurde durch das VAX-Kommandofile LAUF.COM (in der DCL-Kommandosprache, s. Anhang B) realisiert. Dabei ist insbesondere nützlich, daß der VAX Rechner immer neue, durchnummerierte Versionen eines Files erzeugt. Der gesamte Rechenzeit- und Massenspeicher-Aufwand ist bei diesem Verfahren beträchtlich.

5.7.6 Ergebnisse mit bewegten Platten

Wie in Kap. 5.7.4 wurden verschiedene Bedingungen an den Dreiphasenkontaktstellen gewählt. In den ersten beiden Beispielen, Abb. 5.18 a)-j) und Abb. 5.19 a)-g) wurde mit "gepinnten" Grundradien gerechnet.

Die Eingaben bei $U=1\text{m/s}$ und $L=10\text{ }\mu\text{m}$ waren für Abb. 5.18:

$$R_0 = 10\mu\text{m}, h_0=10\mu\text{m}, \eta=0,01\text{Pas}, b=1000\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \gamma=0,03\frac{\text{N}}{\text{m}}, \text{Ca}=0,33 \text{ und } \text{Re}=1,$$

und für Abb. 5.19:

$$R_0 = 100\mu\text{m}, h_0=10\mu\text{m}, \eta=0,01\text{Pas}, b=1000\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \gamma=0,03\frac{\text{N}}{\text{m}}, \text{Ca}=0,33 \text{ und } \text{Re}=1.$$

In den darauf folgenden beiden Beispielen, Abb. 5.20 a)-g) und Abb. 5.21 a)-h), wurde mit frei beweglichen Dreiphasenkontaktstellen gerechnet. Die Eingaben für Abb. 5.20 waren:

$$R_0 = 15\mu\text{m}, h_0=10\mu\text{m}, \vartheta_0=40^\circ, \vartheta_h=40^\circ, \eta=0,01\text{Pas}, b=100\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \gamma=0,03\frac{\text{N}}{\text{m}},$$

$$\text{Ca}=0,33 \text{ und } \text{Re}=1$$

und für Abb. 5.21:

$$R_0 = 50\mu\text{m}, h_0=10\mu\text{m}, \vartheta_0=70^\circ, \vartheta_h=50^\circ, \eta=0,02\text{Pas}, b=630\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \gamma=0,03\frac{\text{N}}{\text{m}}, \text{Ca}=0,6$$

und $\text{Re}=50$. Abweichend von den obigen Rechnungen wurde hier die Bezugslänge $L=1\text{mm}$ gewählt.

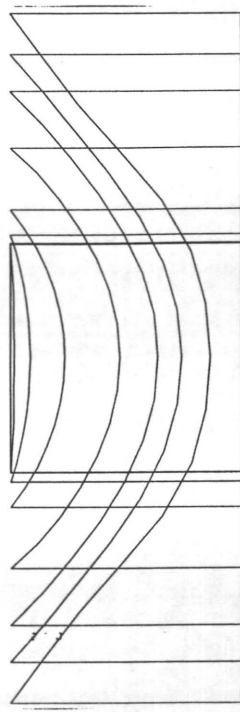


Abb. 5.18 a)

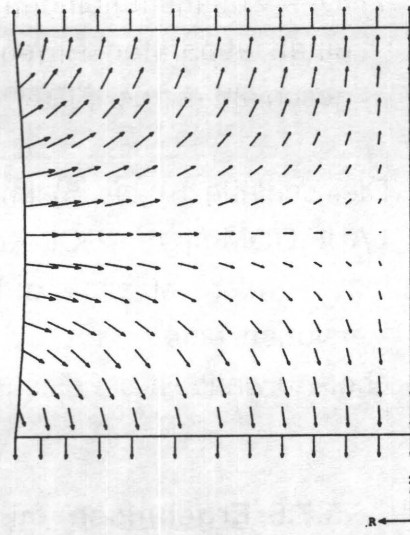


Abb. 5.18 b)

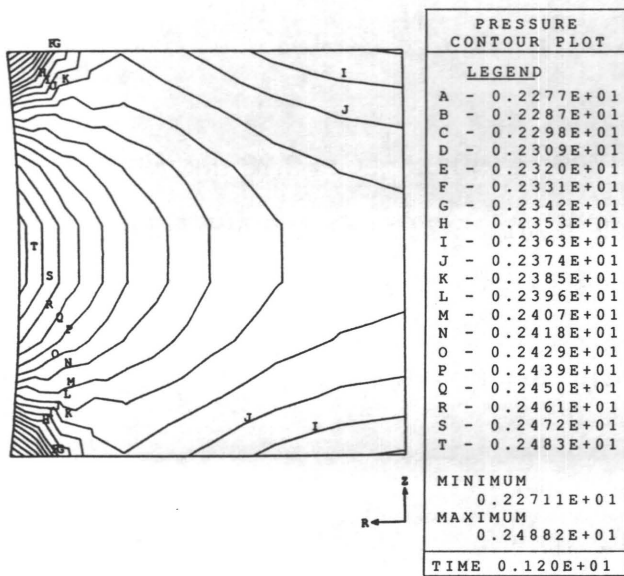


Abb. 5.18 c)

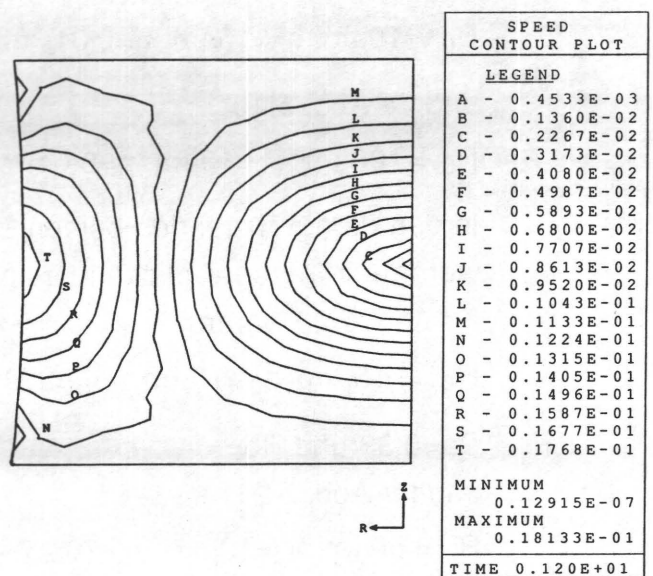


Abb. 5.18 d)

Abb. 5.18 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)

- a) Veränderung der Lage der freien Oberfläche mit der Zeit
- b) Geschwindigkeitsfeld bei $t_{\text{real}} = 0,012\text{ms}$
- c) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,012\text{ms}$
- d) Linien gleichen Geschwindigkeitsbetrags bei $t_{\text{real}} = 0,012\text{ms}$

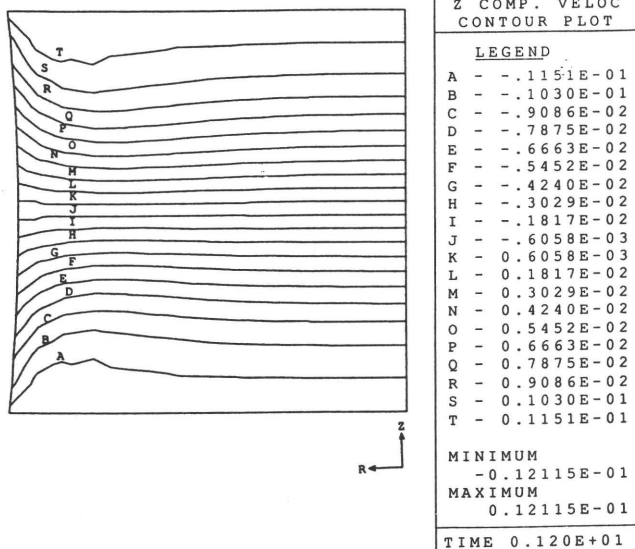


Abb. 5.18 e)

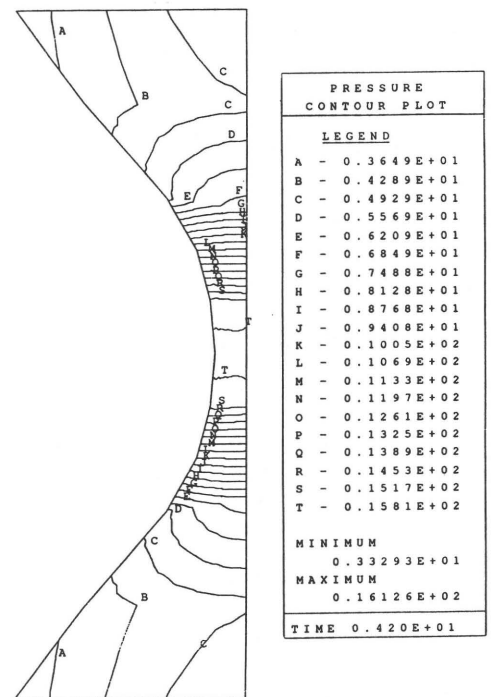


Abb. 5.18 f)

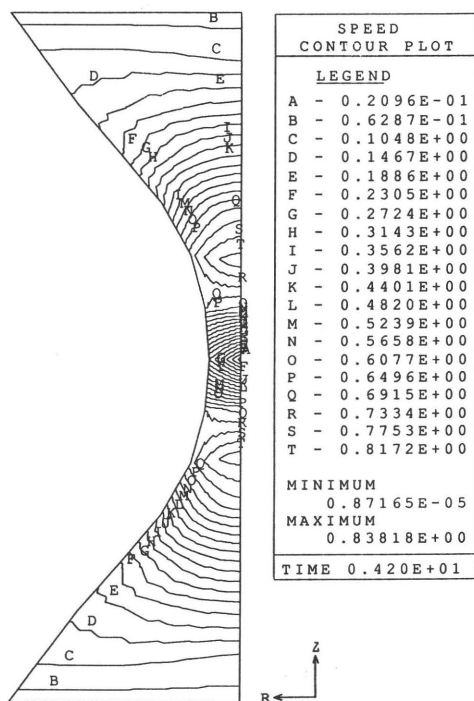


Abb. 5.18 g)

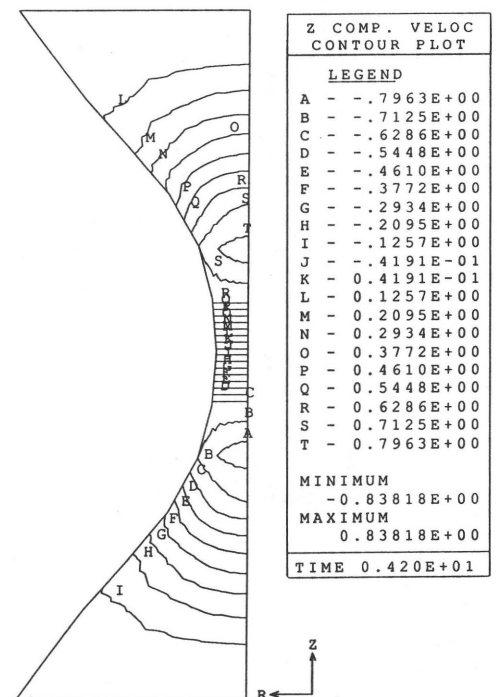


Abb. 5.18 h)

Abb. 5.18 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)

- e) Linien gleicher Geschwindigkeitskomponente w bei $t_{\text{real}} = 0,012\text{ms}$
- f) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,042\text{ms}$
- g) Linien gleichen Geschwindigkeitsbetrags bei $t_{\text{real}} = 0,042\text{ms}$
- h) Linien gleicher Geschwindigkeitskomponente w bei $t_{\text{real}} = 0,042\text{ms}$

Abb. 5.18 i)

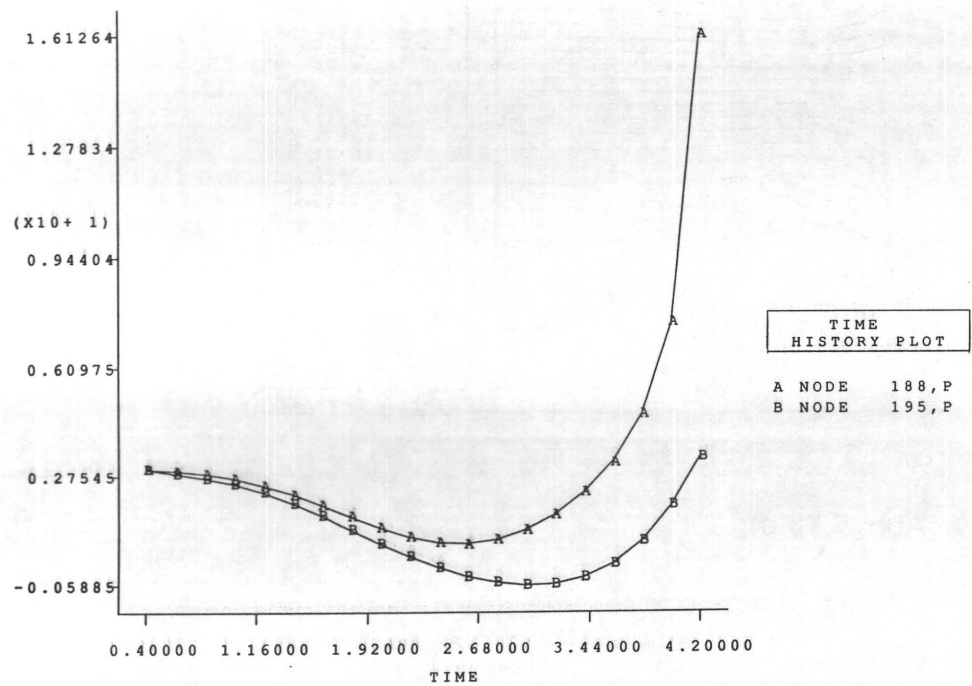


Abb. 5.18 j)

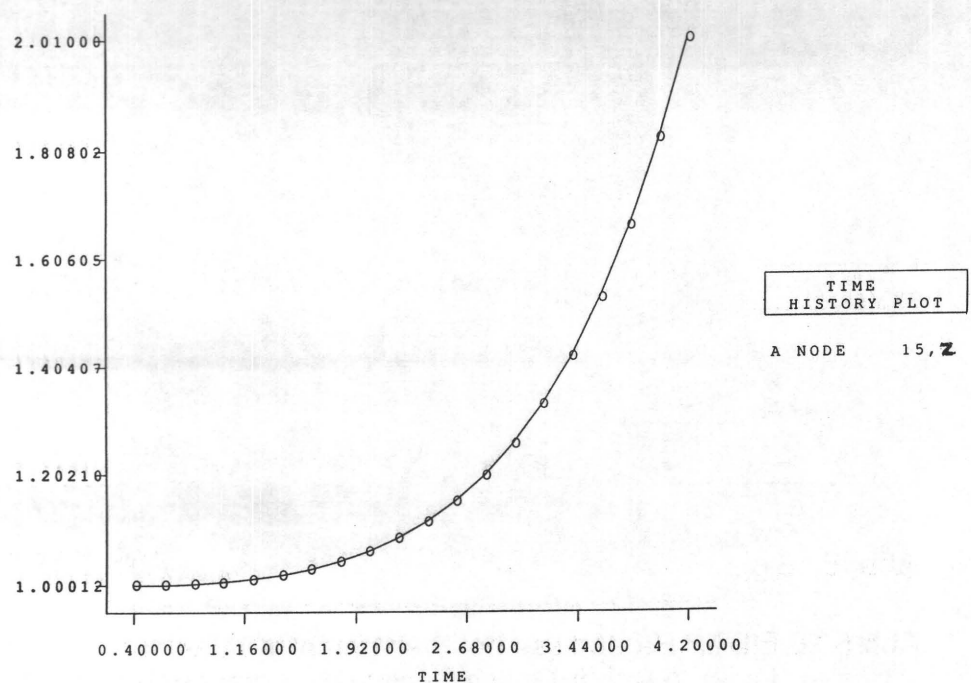


Abb.5.18 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)
i) zeitlicher Verlauf des Drucks an Knoten Nr. 188 und 195
j) zeitlicher Verlauf der z-Position von Knoten Nr.15

Abb. 5.19 a)

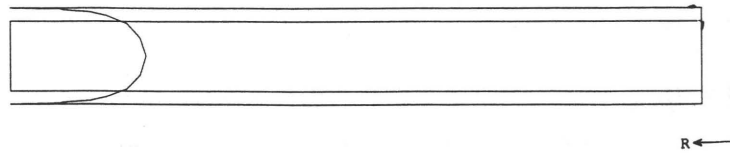


Abb. 5.19 b)

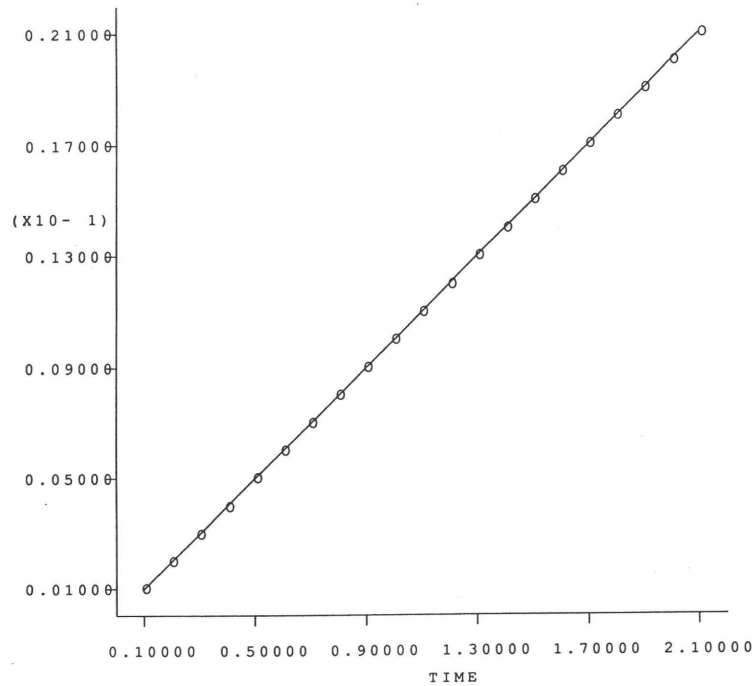


Abb. 5.19 c)

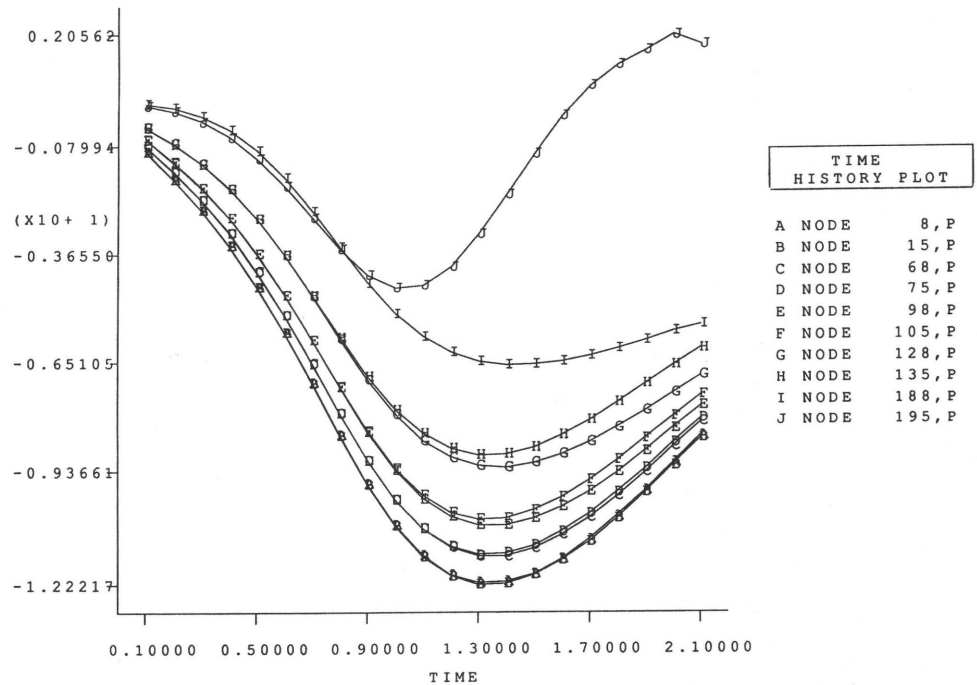


Abb. 5.19 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)

- a) Veränderung der Lage der freien Oberfläche mit der Zeit
- b) zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeitskomponente u
- c) zeitlicher Verlauf des Drucks an verschiedenen Knoten

Abb. 5.19 d)

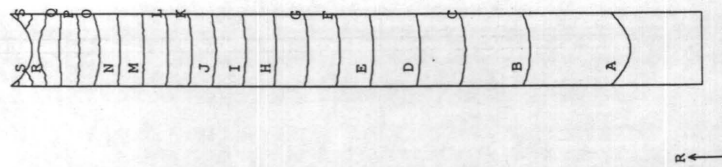


Abb. 5.19 e)

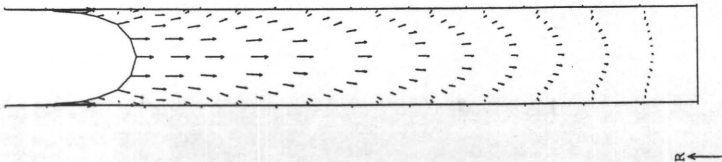


Abb. 5.19 f)

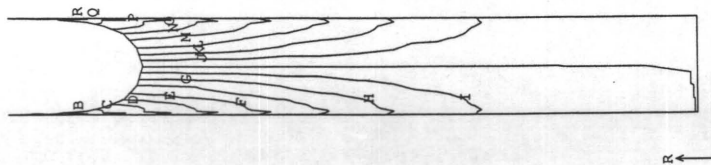
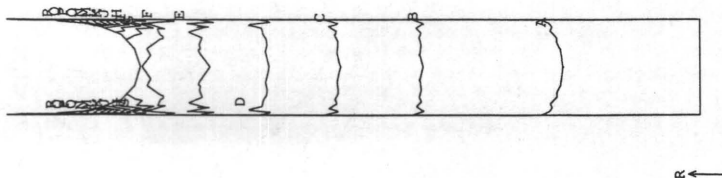


Abb. 5.19 g)



PRESSURE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .1061E+02
B	- .1029E+02
C	- .9983E+01
D	- .9672E+01
E	- .9361E+01
F	- .9050E+01
G	- .8738E+01
H	- .8427E+01
I	- .8116E+01
J	- .7805E+01
K	- .7493E+01
L	- .7182E+01
M	- .6871E+01
N	- .6560E+01
O	- .6248E+01
P	- .5937E+01
Q	- .5626E+01
R	- .5315E+01
S	- .5003E+01
T	- .4692E+01
MINIMUM	
-0.10761E+02	
MAXIMUM	
-0.45364E+01	
TIME 0.100E+01	

STREAMLINE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .6258E+01
B	- .5563E+01
C	- .4869E+01
D	- .4174E+01
E	- .3479E+01
F	- .2784E+01
G	- .2089E+01
H	- .1394E+01
I	- .6992E+00
J	- .4252E-02
K	0.6907E+00
L	0.1386E+01
M	0.2080E+01
N	0.2775E+01
O	0.3470E+01
P	0.4165E+01
Q	0.4860E+01
R	0.5555E+01
S	0.6250E+01
MINIMUM	
-0.66058E+01	
MAXIMUM	
0.65973E+01	
TIME 0.210E+01	

PRESSURE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .8228E+01
B	- .7687E+01
C	- .7145E+01
D	- .6603E+01
E	- .6061E+01
F	- .5520E+01
G	- .4978E+01
H	- .4436E+01
I	- .3894E+01
J	- .3353E+01
K	- .2811E+01
L	- .2269E+01
M	- .1727E+01
N	- .1186E+01
O	- .6438E+00
P	- .1020E+00
Q	0.4398E+00
R	0.9815E+00
S	0.1523E+01
MINIMUM	
-0.84993E+01	
MAXIMUM	
0.17942E+01	
TIME 0.210E+01	

Abb.5.19 FIDAP Ergebnisse bei "gepinnten" Kontaktpunkten, Fall a)

- d) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,01\text{ms}$
- e) Geschwindigkeitsfeld bei $t_{\text{real}} = 0,021\text{ms}$
- f) Stromlinien bei $t_{\text{real}} = 0,021\text{ms}$
- g) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,021\text{ms}$

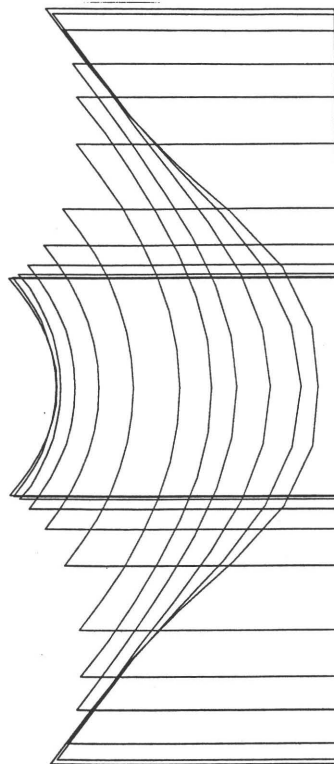


Abb. 5.20 a)

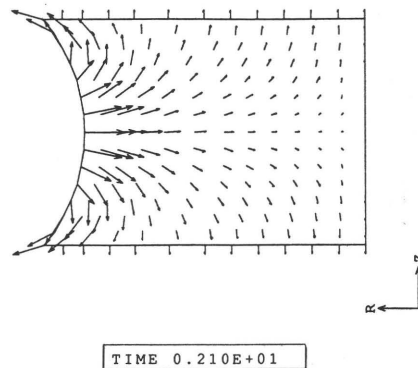


Abb. 5.20 b)

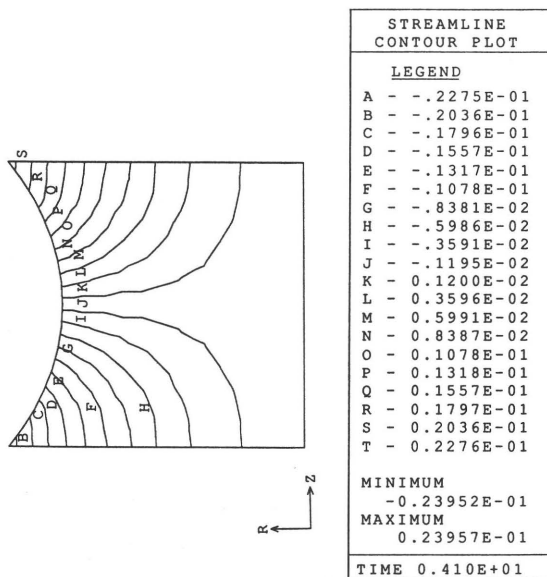


Abb. 5.20 c)

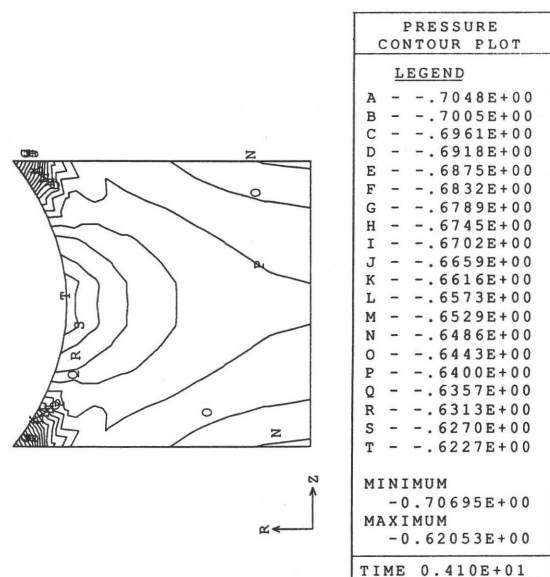


Abb. 5.20 d)

Abb.5.20 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=40^\circ$, $\vartheta_h=40^\circ$, Fall c)

- a) Veränderung der Lage der freien Oberfläche mit der Zeit
- b) Geschwindigkeitsfeld bei $t_{\text{real}} = 0,021 \text{ ms}$
- c) Stromlinien bei $t_{\text{real}} = 0,041 \text{ ms}$
- d) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,041 \text{ ms}$

Abb. 5.20 e)

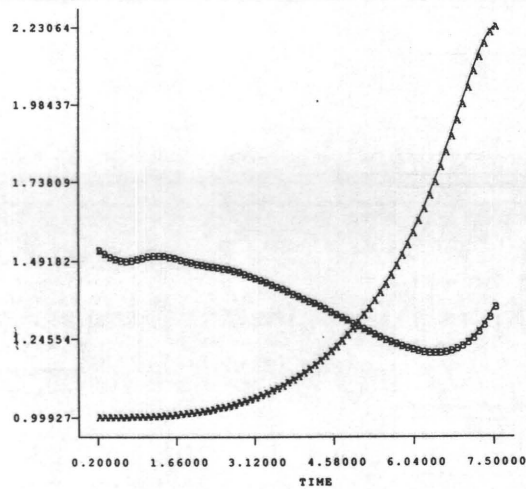


Abb. 5.20 f)

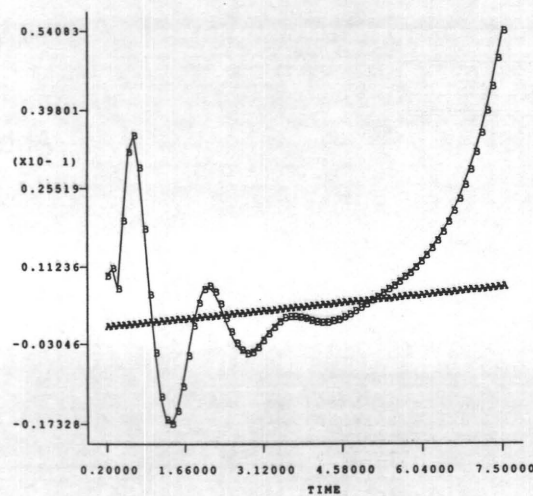


Abb. 5.20 g)

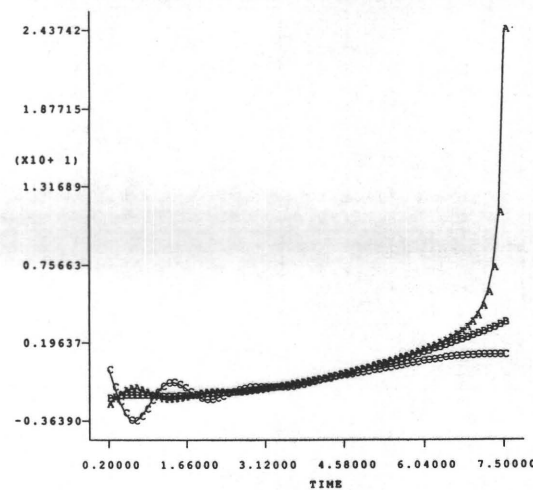


Abb. 5.20 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=40^\circ$, $\vartheta_h=40^\circ$, Fall c)
 e) zeitlicher Verlauf der r-Position und z-Position für Knoten Nr. 195
 f) zeitl. Verlauf der Geschwindigkeitskomponenten u und w für Knoten Nr. 195
 g) zeitlicher Verlauf des Drucks für Knoten Nr. 188, 192 und 195

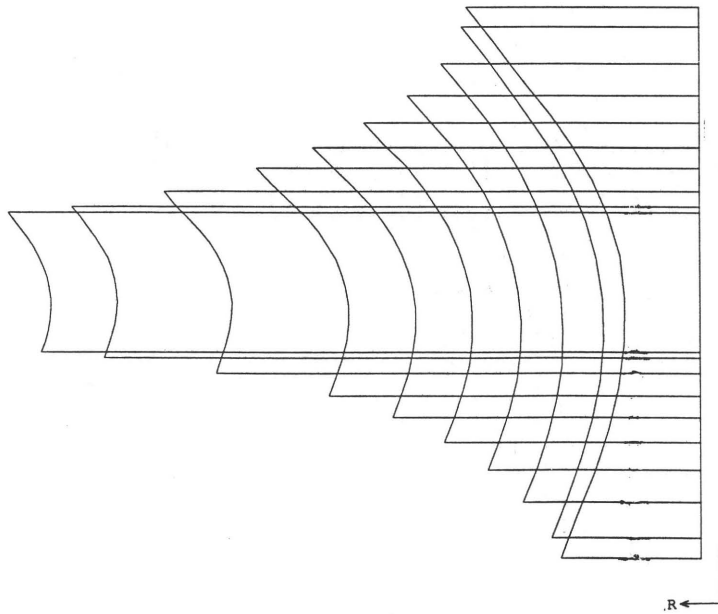


Abb. 5.21 a)

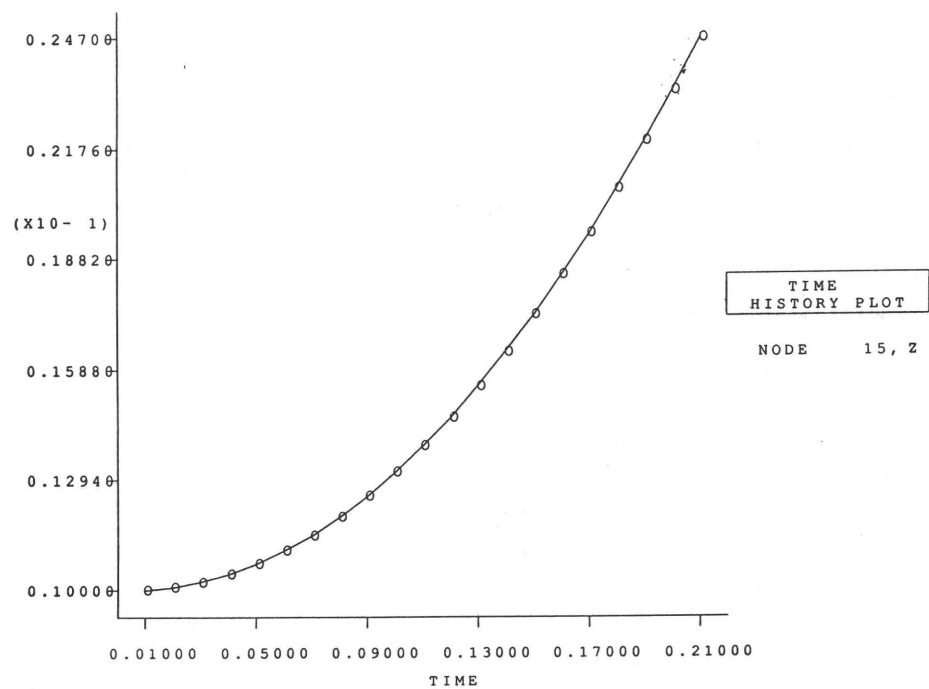
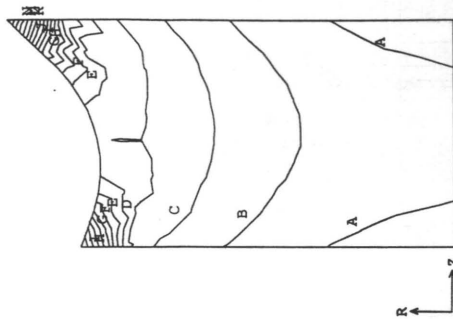


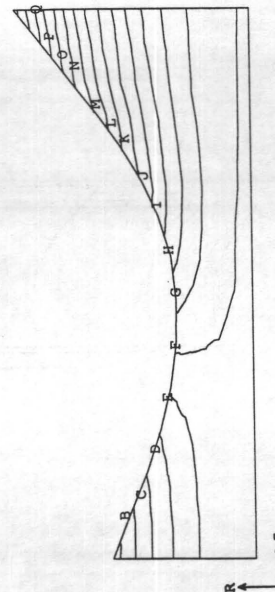
Abb. 5.21 b)

Abb.5.21 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=70^\circ$, $\vartheta_h=50^\circ$, Fall c)
a) Veränderung der Lage der freien Oberfläche mit der Zeit
b) zeitlicher Verlauf der z-Position für Knoten Nr. 15



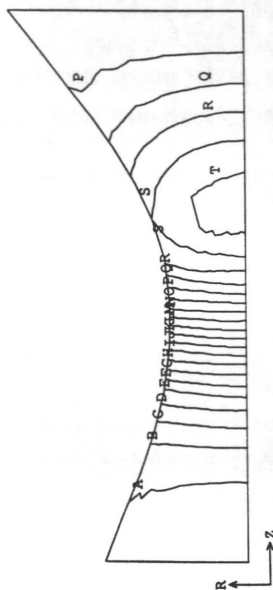
PRESSURE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .1702E+03
B	- .1532E+03
C	- .1361E+03
D	- .1190E+03
E	- .1020E+03
F	- .8488E+02
G	- .6781E+02
H	- .5075E+02
I	- .3368E+02
J	- .1661E+02
K	- 0.4578E+00
L	- 0.1753E+02
M	- 0.3459E+02
N	- 0.5166E+02
O	- 0.6873E+02
P	- 0.8580E+02
Q	- 0.1029E+03
R	- 0.1199E+03
S	- 0.1370E+03
T	- 0.1541E+03
MINIMUM	
-0.17876E+03	
MAXIMUM	
0.16261E+03	
TIME 0.100E+00	

Abb. 5.21 c)



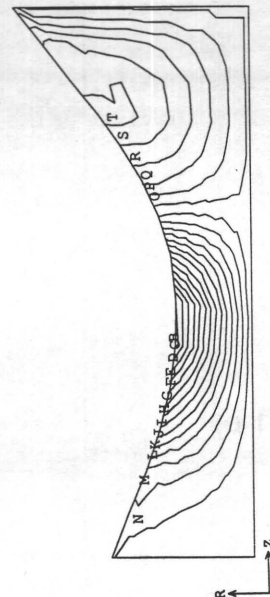
STREAMLINE CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .4444E-04
B	- .3533E-04
C	- .2622E-04
D	- .1711E-04
E	- .7999E-05
F	- 0.1110E-05
G	- 0.1022E-04
H	- 0.1933E-04
I	- 0.2844E-04
J	- 0.3755E-04
K	- 0.4666E-04
L	- 0.5577E-04
M	- 0.6488E-04
N	- 0.7399E-04
O	- 0.8309E-04
P	- 0.9220E-04
Q	- 0.1013E-03
R	- 0.1104E-03
S	- 0.1195E-03
T	- 0.1286E-03
MINIMUM	
-0.48991E-04	
MAXIMUM	
0.13320E-03	
TIME 0.210E+00	

Abb. 5.21 d)



Z COMP. VELOC CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .1371E+00
B	- .1174E+00
C	- .9765E-01
D	- .7792E-01
E	- .5818E-01
F	- .3844E-01
G	- .1870E-01
H	- 0.1039E-02
I	- 0.2078E-01
J	- 0.4052E-01
K	- 0.6025E-01
L	- 0.7999E-01
M	- 0.9973E-01
N	- 0.1195E+00
O	- 0.1392E+00
P	- 0.1589E+00
Q	- 0.1787E+00
R	- 0.1984E+00
S	- 0.2182E+00
T	- 0.2379E+00
MINIMUM	
-0.14700E+00	
MAXIMUM	
0.24777E+00	
TIME 0.210E+00	

Abb. 5.21 e)



R COMP. VELOC CONTOUR PLOT	
LEGEND	
A	- .8788E-01
B	- .8151E-01
C	- .7514E-01
D	- .6877E-01
E	- .6241E-01
F	- .5604E-01
G	- .4967E-01
H	- .4330E-01
I	- .3694E-01
J	- .3057E-01
K	- .2420E-01
L	- .1783E-01
M	- .1147E-01
N	- .5100E-02
O	- 0.1267E-02
P	- 0.7635E-02
Q	- 0.1400E-01
R	- 0.2037E-01
S	- 0.2674E-01
T	- 0.3310E-01
MINIMUM	
-0.91060E-01	
MAXIMUM	
0.36288E-01	
TIME 0.210E+00	

Abb. 5.21 f)

Abb. 5.21 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=70^\circ$, $\vartheta_h=50^\circ$, Fall c)

- c) Druckverteilung (Isobaren) bei $t_{\text{real}} = 0,01\text{ms}$
- d) Stromlinien bei $t_{\text{real}} = 0,021\text{ms}$
- e) Linien gleicher Geschwindigkeitskomponente w bei $t_{\text{real}} = 0,021\text{ms}$
- f) Linien gleicher Geschwindigkeitskomponente u bei $t_{\text{real}} = 0,021\text{ms}$

Abb. 5.21 g)

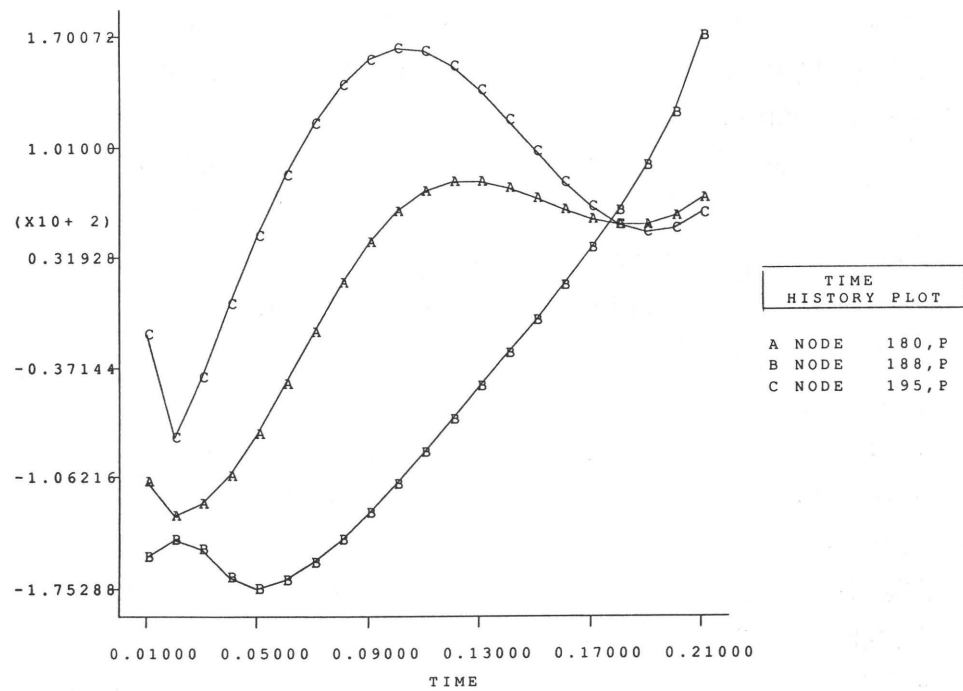


Abb. 5.21 h)

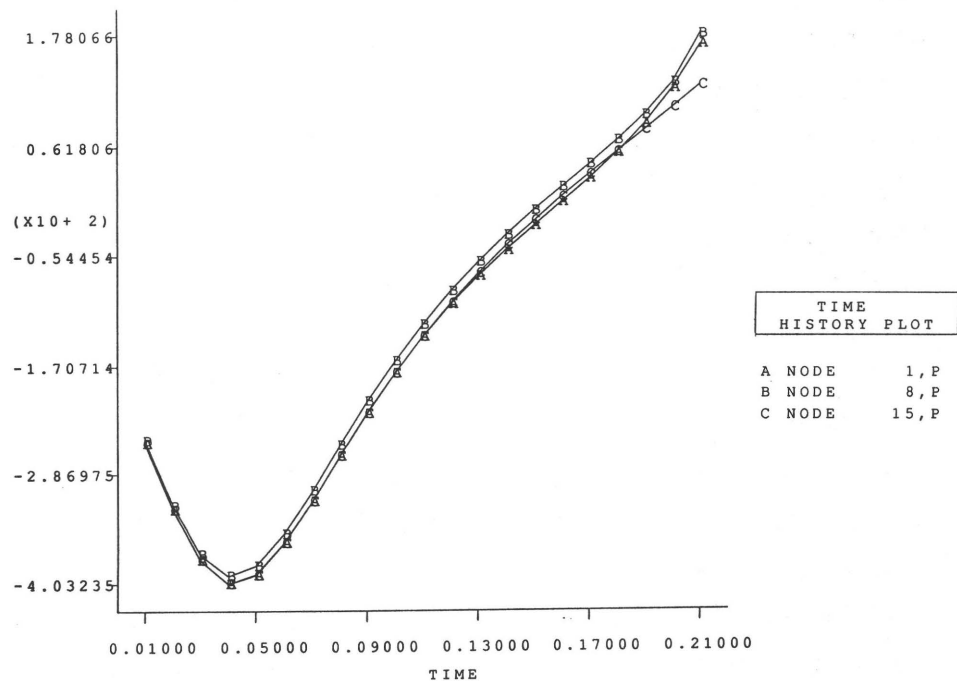


Abb. 5.21 FIDAP Ergebnisse bei vorgegebenen Randwinkeln $\vartheta_0=70^\circ$, $\vartheta_h=50^\circ$, Fall c)
 g) zeitlicher Verlauf des Drucks an Knoten Nr. 180,188 und 195
 h) zeitlicher Verlauf des Drucks an Knoten Nr. 1,8 und 15

Prinzipiell unterscheiden sich die mit den bewegten Platten gefundenen Geschwindigkeits- und Druckverteilungen nur geringfügig von den Lösungen mit starren Platten.

Im Falle der frei beweglichen Dreiphasenkontaktlinie erkennt man anhand Abb. 5.20 a) und 5.20 e) sowie andeutungsweise anhand 5.21 a), daß im Laufe der Spaltungsbewegung die Randradien R_0 und R_h zunächst abnehmen und später wieder zunehmen, was mit der Ausbildung undoloidartiger Formen einhergeht. Dieses Verhalten korrespondiert mit den Messungen im quasi statischen Fall nach Abb. 4.27.

Auch im Fall des festgehaltenen Kontaktpunkts entstehen in Abhängigkeit des Verhältnisses von R_0 zu h undoloidartige Formen, was aus Abb. 5.18 a) hervorgeht.

Die Abbildungen 5.18 a), 5.20 a) und 5.21 a) demonstrieren, daß die Flüssigkeitsbrücken gegen Ende der Bewegung sehr stark eingeschnürt sein können. Im Zentrum ist dann die von Meseguer /19/, /20/ geforderte Bedingung "schlanker" Brücken erfüllt, und man sieht beispielsweise anhand Abb. 5.18 f), daß seine Annahme, die Druckverteilung unabhängig von r anzusetzen, die auf ein eindimensionales "Scheibchenmodell" führt, in diesem Fall eine gute Näherung darstellt. Da sich hier der Farbspaltungsvorgang schon in einem recht fortgeschrittenen Stadium befindet, sind die Stefanschen Gleichungen offensichtlich nicht mehr anwendbar, was auch am zeitlichen Verhalten des Drucks abzulesen ist. Bei allen hier gerechneten Spaltungsvorgängen durchläuft nämlich der Druck an verschiedenen Knoten, ob im Innern oder an der freien Oberfläche, mit fortschreitender Zeit ein Minimum, das in der Regel weit niedriger als der Außendruck liegt, bevor er gegen Ende wieder in den positiven Bereich zurückkehrt. Nach Gleichung (5.65), der Druckverteilung für das Stefansche Problem, folgt, daß der Druck im Innern der Flüssigkeitsbrücke an der Platte bei $r^*=0$ und $z^*=h/2$ stets negativ bleiben und immer weiter abnehmen müßte. An der Stelle, bei der die Drücke in der numerischen Rechnung wieder ansteigen, ist damit wohl die Anwendbarkeitsgrenze der Stefanschen Theorie erreicht.

Sind bei frei beweglichen Dreiphasenkontaktstellen (Fall c) in den zugehörigen Ecken nach Abb. 5.20 d) und 5.21 c) stets Verdichtungen der Isobaren zu beobachten, geht dagegen die anfängliche Verdichtung der Isobaren bei "gepinnten" Kontaktstellen nach Abb. 5.18 c) bei fortschreitender Bewegung nach Abb. 5.18 f) und 5.19 d) zurück. Erst bei ganz spitz zulaufenden Ecken nach Abb. 5.19 g) tritt die Verdichtung wieder auf.

Als numerische Artefakte sind mit großer Wahrscheinlichkeit die "einschwingenden" Kurvenverläufe der Geschwindigkeit u der Dreiphasenkontaktstelle in Abb. 5.20 f) und des Drucks an dieser Stelle in Abb. 5.20 g) zu deuten. Damit lassen sich auch die nach außen gerichteten Geschwindigkeitsvektoren in Abb. 5.20 b) erklären.

Im Gegensatz zu den Rechnungen mit starren Platten (Abb. 5.17) üben die in Abb. 5.21 vorgegebenen unterschiedlichen Randwinkel auch bis gegen Ende der Bewegung einen starken Einfluß auf die Lage der Spaltungsebene aus.

Die Methode der finiten Elemente erweist sich somit als nützliches Werkzeug die Vorgänge bei der Farbspaltung näher zu beleuchten, wenngleich noch weiterreichende physikalische Modelle fehlen, die eine umfassende und befriedigende Beschreibung der Vorgänge an der Dreiphasenkontaktstelle in Abhängigkeit der Materialeigenschaften der beteiligten Festkörper und Flüssigkeiten ermöglichen.

Damit diese Berechnungsmethode als einfaches Hilfsmittel zum Voraussagen des Spaltungsverhältnisses benutzt werden kann, reicht die kommerzielle Software in der jetzigen Form nicht aus und muß auf alle Fälle in die hier aufgezeigte Richtung weiter entwickelt werden.

6. Zusammenfassung

Nach der Charakterisierung der in der Drucktechnik vorkommenden Flüssigkeitsspaltungsvorgänge wurde der Einfluß der grenzflächenphysikalischen Eigenschaften der beteiligten Materialien auf eine bestimmte Art der Spaltprozesse von verschiedenen Aspekten her beleuchtet. Dabei kann aufgrund der kleinen Abmessungen der Flüssigkeitstropfen die Gravitation vernachlässigt werden und ein rotationssymmetrisches Modell angenommen werden. Für den Fall des quasi unendlich langsamen Spaltungsvorgangs wird die Flüssigkeitstropfenkontur nur von den Oberflächenspannungen bestimmt. Dafür erhält man mit Hilfe energetischer Ansätze und Anwendung der Variationsrechnung eine allgemeine Lösung. Als Randbedingung ergibt sich die Young-Duprésche Gleichung. Das Prinzip der minimalen potentiellen Energie erweist sich unter der Voraussetzung, daß die Young-Dupréschen Kontaktwinkelrandbedingungen erfüllt sind, als äquivalent zu der Forderung nach einer minimalen freien Flüssigkeitsoberfläche (bei konstantem Volumen). Dies führt auf ein isoperimetrisches Variationsproblem.

Dennoch bereitet die Beschreibung der Vorgänge an der Dreiphasenkontaktstelle nach wie vor große Schwierigkeiten, da es sich auch durch Messungen zeigt, daß die sich einstellenden makroskopischen Kontaktwinkel und Randradien stark von der Dynamik des Vorgangs abhängen.

Die in der Drucktechnik auftretenden Spaltungsvorgänge verlangen aber aufgrund ihrer hohen Prozeßgeschwindigkeit die Berücksichtigung der hydrodynamischen Kräfte (Reibungs- und Trägheitskräfte) im Tropfeninneren. Ohne Berücksichtigung der freien Oberfläche gelingen analytische Teillösungen, die das Geschwindigkeitsfeld und die Druckverteilung im Tropfeninneren bereits gut beschreiben. Für numerische Lösungen des Problems unter Berücksichtigung der freien Oberflächen und der bewegten Berandungen bei konstantem Tropfenvolumen wurde unter Einbeziehung des kommerziellen Finite-Elemente-Programms FIDAP ein Verfahren entwickelt, was in zeitdiskreten Schritten die kompletten Navier-Stokesschen-Gleichungen löst und verschiedene Randbedingungen an den Dreiphasenkontaktstellen zuläßt.

Auch bei der numerischen Analyse bereitet die dynamische Veränderung der Randbedingungen an der Dreiphasengrenzlinie wegen eines fehlenden physikalischen Modells Schwierigkeiten.

7. Literatur

Numerierung in der Reihenfolge der Nennung.

Zitiert auf Seite(n) Nr.:

- /1/ Wiesner R., Scheuter K.R.
"Ermittlung von Farbspaltungsfaktoren in Walzenfarbwerken"
Institutsbericht 1/1983
Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren
(IDD) der TH-Darmstadt 12
- /2/ Gudehus T.
"Walzen und Rollen mit elastomerem Bezug"
Fachinformation Böttcher 1984
Fa. Böttcher Stolbergerstr. 5000 Köln 12
- /3/ Hübner G., Scheuter K. R.
"Die Kontrolle des Farb-Wasser-Gleichgewichts in
Offsetdruckmaschinen mittels Ultraschallsensoren"
Institutsbericht 2/1985
Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren
(IDD) der TH-Darmstadt 13
- /4/ Stefan J.
"Versuche über die scheinbare Capillarität"
Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe
der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien
LXIX. Band, II. Abtheilung 1874, S. 713-735 13,88
- /5/ Humbel V.
"Tackmessung und Tackmeter"
UGRA-Mitteilungen Nr.1, März 1982, S. 3-12 14
- /6/ Kelhä V., Maiminen M., Oittinen P., Tiesmäki J.
"Parallel Plane Tackmeter, a new Tackmeter measuring fast ink film
splitting in plane geometry"
Graphic Arts in Finland 1, 1973, S. 1-8 14,94
- /7/ Howe W.
"Die Rotationsflächen, welche bei vorgeschriebener Flächengröße ein
möglichst großes oder kleines Volumen enthalten"
Diss. Friedr.-Wilhelms-Universität Berlin 1887 15,42,43

- /8/ Gillette R.D., Dyson D.C.
 "Stability of Fluid Interfaces of Revolution Between Equal Solid Circular Plates"
 Chemical Engineering(2) (1971) S. 44-54 15,42
- /9/ Meseguer J., Sanz A., Lopez J.
 "Liquid Bridge Breakages Aboard Spacelab-D1"
 Journal of Crystal Growth 78 (1986) S. 325-334 15
- /10/ Martinez I., Perales J.M.
 "Liquid Bridge Stability Data"
 Journal of Crystal Growth 78 (1986) S. 369-378 15,42
- /11/ Fortes M.A.
 "Axisymmetric Liquid Bridges Between Parallel Plates"
 Journal of Colloid and Interface Science
 88 Nr.2 (1982) S. 338-352 15,42
- /12/ Martinez I.
 "Stability of Axisymmetric Liquid Bridges"
 Proceedings of the 4th European Symposium on Materials Sciences
 under Microgravity.
 Madrid, Spain, 5-8 April (1983) S. 267-273 15
- /13/ Hwang K.S., German R.M., Lenel F.V.
 "Capillary Forces between Spheres during Agglomeration and Liquid
 Phase Sintering"
 Metallurgical Transactions Vol 18a (1987) S. 11-17 15
- /14/ De Bisshop F.R.E, Rigole W.J.L.
 "A Physical Model for Liquid Capillary Bridges Between Adsorptive
 Solid Spheres: The Nodoid of Plateau"
 Journal of Colloid and Interface Science
 Vol 88 (1982) S.117-126 15,43
- /15/ Steidel J., Urban H., Joppien G.R.
 "Untersuchungen von grenzflächenphysikalischen Eigenschaften und
 deren Veränderungen an farb- und wasserführenden Oberflächen in
 Offsetdruckmaschinen"
 Institutsbericht 2/1988
 Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren
 (IDD) der TH-Darmstadt 16,66
- /16/ Davis S.H.
 "Contact-Line Problems in Fluid Mechanics"

- Journal of Applied Mechanics
December 1983, Vol 50, S. 977-982 16,83
- /17/ Huh C., Scriven L.E.
"Hydrodynamic Model of Steady Movement of a Solid/Liquid/Fluid
Contact Line"
Journal of Colloid and Interface Science
Vol. 35, Nr.1, Jan 1971, S. 85-101 16,83,86,105,110
- /18/ Moffat H. K.
"Viscous and Resistive Eddies near a Sharp Corner"
Journal of Fluid Mechanics 18 (1964) S. 1-18 16
- /19/ Meseguer J.
"The Breaking of Axisymmetric Slender Liquid Bridges"
Journal Fluid Mechanics (1983) Vol 130 S. 123-151 16,126
- /20/ Meseguer J. Sanz A.
"Numerical and Experimental Study of the Dynamics of Axisymmetric
Slender Liquid Bridges"
Journal Fluid Mechanics (1985) Vol 153 S. 83-101 16,126
- /21/ Wolf K.L.
"Physik und Chemie der Grenzflächen" Bd. I u. II
Springer-Verlag 1957 24,43,50
- /22/ Wetzler H.
"Kennzahlen der Vefahrenstechnik"
Hüthig-Verlag 1985 25,38,84
- /23/ Finn R.
"Equilibrium Capillary Surfaces"
Springer-Verlag 1985 27,29
- /24/ Myshkis A.D., Babskii V.G., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A. und
Tyuptsov A.D.
"Low Gravity Fluid Mechanics"
Springer-Verlag 1986 27
- /25/ Blaschke W.
"Elementare Differentialgeometrie I"
3. Aufl. Springer-Verlag 1930 27,29
- /26/ Bronstein, Semendjajew
"Taschenbuch der Mathematik"
Verlag Harri Deutsch 20. Aufl., 1981 31,36,37,41,95

/27/	Gradstein I.S., Rhyshik I.M. "Table of Integrals, Series and Products" Academic-Press-Verlag 4. Aufl., 1965	42
/28/	Törnig W. "Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker" Bd. I u. II Springer-Verlag 1979	63
/29/	Fowkes Attractive Forces at Solid-Liquid-Interfaces in "Wetting" S.C.I. Monograph Nr. 25, 1967, S. 3-30	67
/30/	Spurk J.H. "Strömungslehre" Springer-Verlag 1987	78,79,81,87,95
/31/	Landau L., Levich B. "Dragging of a Liquid by a Moving Plate" Acta Physicochimica U.R.S.S. XVII (1942) S. 43-54	84
/32/	Deryagin B.M., Levi S.M. "Film Coating Theory" The Focal Press London and New York 1964	84
/33/	Zimmermann E. "Ein Beitrag zur Bestimmung des statischen und dynamischen Randwinkels" Diss. Universität-GH-Essen 1985	84
/34/	Joos P., Bracke M. Van Remoortere P. "The Dynamics of Wetting" Paper presented at the AIChE Meeting at Orlando Fl. (1990)	85
/35/	Hens J., Mues W. "Laser-Doppler Measurements in the Vicinity of a Moving Contact Line Vortrag auf dem AiChE Spring National Meeting New Orleans LA 6.bis 10. März (1988)	85,86
/36/	Hocking L.M. "A Moving Fluid Interface (Part 2) The Removal of the Force Singularity by a Slip Flow" Journal of Fluid Mechanics (1977) Vol 79, S. 209-229	86,110
/37/	Oka S. Principles of Rheometry in "Rheology, Theory and Applications" Vol. 3, Academic Press 1960, S. 17-82	95

- /38/ Bird R.B., Armstrong R.C.
 "Dynamic of Polymeric Liquids"
 V. I. Fluid Dynamics
 New York (1987) 95
- /39/ FIDAP Theoretical Manual Version 4.0 und 5.0
 Fluid Dynamics International Inc.
 1600 Orrington Avenue, Suite 400
 Evanston Illinois 60201 (USA) 100,102,110
- /40/ Kistler S.F., Scriven L.E.
 "Coating Flows" in
 "Computational Analysis of Polymer Processing"
 Ed. by Pearson J.R.A. und Richardson S.M.
 Applied Science Publishers,
 London and New York 1984, S. 243-299 100,110

Anhang A FIDAP Input-File FIINP (bzw. SPLN.FIINP)

```

*title
r0=50,h0=10mue,St=0.03,b=1000,eta=0.02,A1=70,A2=50
*FIMESH(2-D,IMAX=3,JMAX=3)
EXPI
1 5 15
EXPJ
1 7 13
POINT
1 1 1 1 0. 0.
3 3 1 1 1 0.
4 1 2 1 0. 1.5
6 3 2 1 1 1.5
7 1 3 1 0. 2.8032
9 3 3 1 1 3.0624
CURVE(print=1,input=1)
7 9 15
LINE
1 3
1 4
3 6
4 7 .5 3
6 9 .5 3
SURFACE
1 9
ELEMENTS(QUAD,NODES=9,ALL)
ELEMENTS(BOUNDARY,NODES=3)
7 9
BCNODE(UZC)
3 9 1 1 1
1 7 -1 -1 1
BCNODE(URC,CONST)
1 3 0.
1 7 0.
3 9 0.
BCNODE(URC,FREE)
7 7
9 9
/wird gepinnt, wenn nicht auskommentiert:
/BCNODE(Surface)
/7 7 1
/9 9 1
SPINES
9 3 7
END
*PROBLEM(TRANS,FREE,NONL,AXI-SYMM)
*PRESSURE(MIXED=1e-9,DISCONT)
*OPTIONS(STRESSDIVERGENCE)
*EXECUTION(newjob)
/oder
*EXECUTION(restart)
*SOLUTION(Q.N.=10,VELCONV=.001,RESCONV=.001)
*TIMEINT(BACKW,NSTEPS=30,TSTART=0.,DT=0.01,nofixed=6,DTMAX=1)
*TMFUNCTION(SET=1,NPOINTS=2)
0 0.
1000 50
*NODES(FIMESH)
*DENSITY(CONSTANT=1)
*VISCOSITY(CONSTANT=1)
*SURFACETENS(CONSTANT=1.50,pressure=0.0,Ang1=160.,Ang2=40.)
*ELEMENTS(NODES=9,FIMESH)
*ELEMENTS(SURFACE,NODES=3,FIMESH)
*END

```

zugehöriges Curve-File SPLN.FISPLN:

0	2.8032
0.0714	2.768
0.1429	2.7408
0.2143	2.7216
0.2857	2.7104
0.3571	2.7088
0.4286	2.7136
0.5	2.728
0.5714	2.7488
0.6429	2.7792
0.7143	2.8176
0.7857	2.8656
0.8571	2.9216
0.9286	2.9872
1	3.0624

Anhang B VAX Kommando-File LAUF.COM

```
$START:
$! bypass for test: goto test
$ write sys$output "****kopiere spln.fdpst auf spln.fdst"
$ copy spln.fdpst spln.fdst
$ write sys$output "****lese FDOUT-file schreibe auf spln.fispln"
$ run volcorr.exe
$ write sys$output "****lese spln.fispln und schreibe in FIINP"
$ run write_fiinp.exe
$!
$run fiprep.exe
$!
$write sys$output "****schicke fiinp ab"
$cray submit spln_fidap.job
$!
$! ist spln.fdpst vorhanden ?
$TEST:
$ vorh=F$search("SPLN.FDPOST")
$ INPFIL = "SPLN.FDPOST"
$!
$ ROOT = F$PARSE(INPFIL,,,"NAME")
$ XX = F$SEARCH(INPFIL)
$ LL = F$LENGTH(XX)
$ JJ = F$LOCATE("]",XX)
$ INPFIL2 = F$EXTRACT(JJ+1,LL,XX)
$!
$GET_TYPE:
$ FTYPE = F$PARSE(INPFIL,,,"TYPE")
$!
$GET_VERSION:
$ VERS = F$PARSE(INPFIL2,,,"VERSION")
$ VERS = F$INTEGER(F$EXTRACT(1,F$LENGTH(VERS),VERS)) + 1
$ BINFIL = ROOT + FTYPE + ":'VERS'"
$ CPRFIL = ROOT + ".CPR" + ":'VERS'"
$!
$ vorh2 = ""
$ vorhcpr= ""
$!warten bis neue Version von spln.fdpst vorhanden
$LOOP:
$ Write SYS$output "'INPFIL2' vorhanden, warte auf 'BINFIL'"
$ Write SYS$output "oder auf 'CPRFIL'"
$ Write SYS$output "Abbruch, wenn 'CPRFIL' vor 'BINFIL' vorhanden!!"
$ vorh2 = F$SEARCH(BINFIL)
$ vorhcpr =F$SEARCH(CPRFIL)
$ if (vorh2 .NES. "" .AND. vorhcpr.NES. "") THEN goto start
$ if (vorh2 .EQS. "" .AND. vorhcpr.NES. "") THEN -
    WRITE SYS$OUTPUT "Abbruch, weil 'CPRFIL' vor 'BINFIL' vorhanden!!"
$ if (vorh2 .EQS. "" .AND. vorhcpr.NES. "") THEN goto exit
$ ON CONTROL THEN EXIT
$ ON ERROR THEN EXIT
$ wait 00:03:00
$ goto LOOP
$ EXIT:
```

Anhang C FORTRAN-Routine VOLCORR.FOR

```

      Program volcorr
C   Dieses Programm liest in dem FIDAP Outputfile mit dem Namen
C   SPLN.FDOUT für die Knoten Von NA bis NE (hier 15 Knoten,
C   korrespondierend zu EXPI,EXPJ-daten) die Position und die
C   Geschwindigkeiten. In dem File SPLN.FISPLN werden die neu berechneten
C   Koordinaten abgelegt.
C   Lese jetzt auch aktuelle Zeit und Zeitincrement!!
C   der beim Zeitschritt in FIDAP durch den Restart-Vorgang
C   entstandene Volumenverlust wird mit dem vorherigen SPLN.FISPLN-File
C   berechnet und iterativ korrigiert

C   DIMENSION X(100),Y(100),Z(100),U(100),V(100),W(100),
+           XALT(100),YALT(100),xneu(100),yneu(100),
+           GEW(100)
      character*1 text(132)
      character*12 ttext,tinc
      PI=3.141

C
C   lese Daten aus altem FISPLN-File:
      open(unit=32,err=7000,file='spln.fispln',status='old')
      K=1
      6   read(32,*,ERR=7000,end=8)XALT(K),YALT(K)
      K=K+1
C   type*,xalt(k),yalt(k)
      GOTO 6
      8   KANZ=K-1
      call VOLUME(XALT,YALT,KANZ,VOLALT)
C   TYPE*, ' Das Volumen vor FIDAP war:',VOLALT
      CLOSE(UNIT=32)

C
      OPEN(UNIT=30,FILE='SPLN.FDOUT',STATUS='OLD')
      OPEN(UNIT=31,FILE='SPLN.FISPLN',STATUS='new')

C
C   "V E L O" steht ab spalte 2 und Knoten 5 Zeilen spaeter!
      N=2
      LZ=5

C   TIME steht ab spalte NT mit E12.4 Timeinc ab Spalte NI
      NT=86
      NI=115
      istep=0
      10  istep=istep+1
      L=0
      LP=0
      NA=12*15
      NE=13*15
      Nanz=NE-NA

C   lese durch den ganzen File:
      15 read(30,20,end=1000)Text
C   write(5,20)text
      20  format(132a1)

C   bestimmen der absoluten Zeit, time steht in P R I N.....
      IF((Text(N).eq.'P').and.(Text(n+1).eq.' ').and.(text(n+2)
+       .eq.'R').AND.(text(n+3).eq.' ').AND.(text(n+4).eq.
+       'I')) then
C   write(5,20)text
      ttext=
+       text(NT)//text(NT+1)//text(NT+2)//text(NT+3)
+       //text(NT+4)//text(NT+5)//text(NT+6)//

```



```

+          text (NT+7)//text (NT+8)//text (NT+9)//text (NT+10)//
+          text (NT+11)
c    type*,ttext
      DECODE(12,18,ttext) TIM
      tinc=
+          text (NI)//text (NI+1)//text (NI+2)//text (NI+3)
+          //text (NI+4)//text (NI+5)//text (NI+6)//
+          text (NI+7)//text (NI+8)//text (NI+9)//text (NI+10)//
+          text (NI+11)
c    type*,tinc
      DECODE(12,18,tinc) TIMINC
18    format (E12.4)
c      write(5,19)TIM,TIMINC
19    format(' die momentane Zeit ist:',E12.4,
+          ' der Zeitschritt ist:',E12.4)
      type*, 'momentane Zeit ist:',TIM,
+          ' der Zeitschritt ist:',TIMINC
      else
      endif
C jetzt Text lesen bis "V E" auftaucht:
      IF((Text (N).eq.'V').and. (Text (n+1).eq.' ').and. (text (n+2)
+          .eq.'E')) then
          L=1
          LSTEP=ISTEP
      else
      endif
      LP=LP+L
c      type*,LP,L
      if (LP.ge.LZ) goto 25
      goto 15
C
25    type*, 'V E L O gefunden!'
      type*, 'lese velo von ',nanz,' Nodes von Nr.:',Na,' bis ',ne
30    read(30,170,end=1000)NN,X(1),Y(1),Z(1),U(1),V(1),W(1)
170    FORMAT(I7,3F17.7,4E18.8)
c für FIDAP Version 4.*: 170    FORMAT(I6,3F17.7,4E18.8)
c      write(5,170)NN,X(1),Y(1),Z(1),U(1),V(1),W(1)
      IF (NN.lt.NA) goto 30
C
      sumw=0
      DO 200 J=1,Nanz
          READ(30,170)NN,X(J),Y(J),Z(J),U(J),V(J),W(J)
          sumw=sumw+W(J)
200    CONTINUE
c falls mehrere STEPS in FDOUT gehe zum nächsten step!
      type*, '***** suche nach nächstem step*****'
      goto 10
C
1000  if (LSTEP.eq.0) goto 2000
      type*, 'letzter Timestep erreicht, prüfe Volumen!'
      call VOLUME(X,Y,NANZ,VOL)
c beginn der iterativen Korrektur des Volumens!
c Abbruchschranke epsilon:
      eps=1e-6
      type*, 'Volumenänd durch Fehler bei Restart in FIDAP'
+      ' wird durch Verschieben der Wand ausgeglichen!!!'
      DELTAV=VOLALT-VOL
      type*, ' Volumen vor    FIDAP:          ',VOLALT
      type*, ' Volumen nach   FIDAP:          ',VOL
      type*, ' Volumenänd. in FIDAP:         ',DELTAV

```

```

c Zur Kontrolle:
C VOLWND = Volumen, das durch die Wand weggeht!!
VOLWND=PI*Y(1)**2*TIMINC*(-U(1))+PI*Y(NANZ)**2*TIMINC*U(NANZ)
DO 1090 ISCH=1,NANZ
XNEU(ISCH)=TIMINC*U(ISCH)+XALT(ISCH)
type*, 'Nr', isch, 'xalt=', xalt(isch), ' xneu=', xneu(isch)
1090 CONTINUE
call VOLUME(XNEU,Y,NANZ,VOLVEL)
TYPE*, 'bei Versch. nach Geschw.kompo. w%re neues Volumen=', volvel
c
c*****
iter=1
c Beginn Iterationsschleife
c Verteilen von DELTAV auf Ringsegment
1100 YAZYI =sqrt(DELTA/TAV/VOLalt+1)
c
c Korrektur:
DO 500 J=1,NANZ
GEW(J)=(1-YAZYI)*W(J)/sumw
X(J)=XNEU(J)
Y(J)=Y(J)*GEW(J)
500 continue
c test, ob volume auch ok.
call VOLUME(X,Y,NANZ,VOLN)
type*, ' Sollvol.:', VOLalt, ' Vol. nach ', iter,
+ 'ter Iteration:', VOLN
deltav=volalt-voln
if ((deltav/volalt)**2.gt.eps) then
iter=iter+1
if(iter.gt.100) goto 2000
goto 1100
else
type*, '##Volumen korrigiert in', iter, ' Schritten.',
+ ' Schreibe jetzt SPLN.FISPLN neu!!'
do 1200 j=1,Nanz
Type*, ' Neue Position x:', X(J), ' Y:', y(j)
WRITE(31,*)X(J),Y(J)
1200 continue
endif
c führen eines LOG-files
type*, '+++++++schreibe LOG-file!!+++++++'
open(unit=40,err=6000,file='spln.log',status='unknown')
read(40,*,end=5000)TIME,TIMINC,VOLALT,VOLN,iter
read(40,*,end=5000)((xalt(I),yalt(I))I=1,nanz)
5000 write(40,*,err=5500)TIME,TIMINC,VOLALT,VOLN,iter
write(40,*)((x(I),y(I))I=1,nanz)
c
2000 STOP
5500 TYPE*, '**** Fehler beim Schreiben von SPLN.log****'
stop
6000 TYPE*, '**** Fehler beim Lesen von SPLN.log****'
stop
7000 TYPE*, '**** Fehler beim Lesen von SPLN.FISPLN****'
goto 2000
END
c*****
subroutine VOLUME(z,r,K,VOL)
c berechnet aus den CURVE-Daten z.B.in File SPLN.FISPLN;* das Volumen des
c Rotationskörpers. V=pi* integral(r**2dz) von a bis b.
C input: r und z-werte K=Anzahl der Stützstellen

```

```

C output: Volumen VOL
      DIMENSION R(100),Z(100)
      PI=3.14159
      VOL=0
      do 200 j=1,k-1
            VOL=VOL+pi*(R(J+1)+R(J))**2/4.*(Z(j+1)-Z(j))
200  continue
c      TYPE*, ' Das Volumen ist:',VOL
2000 return
      end

```

Anhang D FORTRAN-Routine WRITE_FIINP.FOR

```

      Program wrtfinp
c   WRTFIINP liest das alte SPLN.FIINP-File und das mit VOLCORR
C   erstellte SPLN.FISPLN-File und schreibt die neuen geometrischen
C   Knotenkoordinaten in ein neues SPLN.FIINP-File.
C
      DIMENSION X(100),Y(100),Z(100),U(100),V(100),W(100),
1         N(20),Ni(20),Nj(20),Nk(20)
      character*80 text
C
      OPEN(UNIT=30,FILE='SPLN.Fiinp',STATUS='OLD')
      OPEN(UNIT=31,FILE='SPLN.fiinp',STATUS='new',
+         carriagecontrol='list')
      OPEN(UNIT=32,FILE='SPLN.FISPLN',STATUS='old')
C
      Nz=1
C
      J=1
2      read(32,*,end=10)U(J),V(J)
C         write(5,*)j,U(j),v(j)
      j=j+1
      GOTO 2
C
10     Izeil=0
13     Izeil=Izeil+1
      read(30,14,end=1000)Text
14     format(a)
C
25     write(31,14)text
C
      if (izeil.ne.8) goto 13
C
      type*,'"POINT" ab Zeile 8:Schreibe Koordinaten:'
C   type*, 'u(1)',u(1), ' u(',j,') ',u(j), ' v(1)',v(1), 'v(j)',v(j)
      Do 40 I=1,6
24         read (30,24)N(i),Ni(i),Nj(i),Nk(i),X(I),Y(I)
            format(I2,3i2,2(1X,f8.5))
            If(n(i).eq.1) x(i)=u(1)
            If(n(i).eq.1) y(i)=0.0
            If(n(i).eq.3) x(i)=u(j-1)
            If(n(i).eq.3) y(i)=0.0
            If(n(i).eq.4) x(i)=u(1)
            If(n(i).eq.4) y(i)=v(1)/2.
            If(n(i).eq.6) x(i)=u(j-1)
            If(n(i).eq.6) y(i)=v(j-1)/2.
            If(n(i).eq.7) x(i)=u(1)
            If(n(i).eq.7) y(i)=v(1)
            If(n(i).eq.9) x(i)=u(j-1)
            If(n(i).eq.9) y(i)=v(j-1)
C
            write (31,24)N(i),Ni(i),Nj(i),Nk(i),X(I),Y(I)
40     CONTINUE
      goto 13
C
1000 STOP
      END

```

Gunter Hübner
Kahlertstr. 36
6100 Darmstadt

LEBENS LAUF

7. 11. 1956 geboren in 6718 Grünstadt/Pfalz
- 1963-1966 Grundschule Grünstadt
- 1966-1975 Leininger Gymnasium Grünstadt
22. 5. 1975 Abitur
- 1975-1982 Studium des allg. Maschinenbaus an der TH Darmstadt
1. 12. 1977 Vordiplom
14. 5. 1982 Diplom
1. 10. 1982
bis 31. 12. 1987 Wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren
(IDD) der TH-Darmstadt bei Prof. Scheuter bzw. ab
1. 1. 1987 bei Prof. Hars.
- ab 1. 3. 1988 Forschungsingenieur
bei Fa. Du Pont de Nemours (Deutschland)